Nom :
Prenom :
Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé nř1
Vendredi 9 octobre Septembre 2015 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

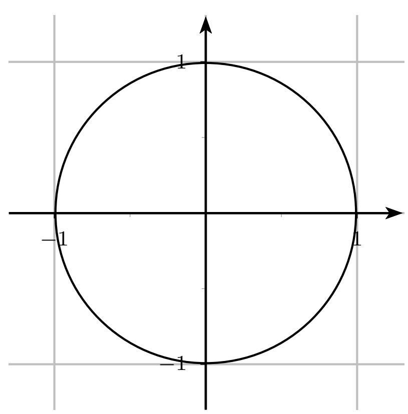
Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f.
3. Déterminer le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de f en $-\infty$ en $+\infty$
5. Déterminer l'équation de T, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
6. Sur le graphique ci-dessous tracer T et la courbe représentative de f.

Exercice 2

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les points M_1, M_2 et M_3 tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ soit $\dfrac{24\pi}{4}$, $-\dfrac{29\pi}{6}$ et $\dfrac{1234\pi}{3}$.



2. Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

(a) $\cos\left(\dfrac{35\pi}{4}\right)$ (b) $\sin\left(\dfrac{-35\pi}{2}\right)$ (c) $\tan\left(\dfrac{1234\pi}{3}\right)$

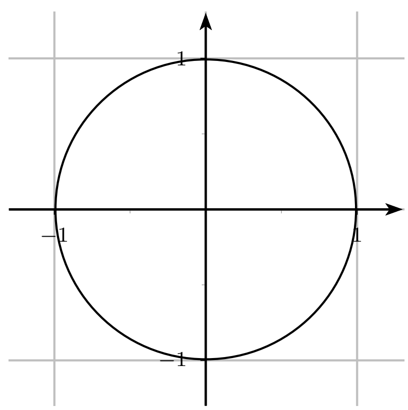
Exercice 3

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les phrases suivantes :
   (a) Les courbes de f et g ne se croisent pas sur $\mathbb{R}$
   (b) f n'est pas la fonction constante égale à 1
   (c) f est comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$
2. Répondre par vrai ou faux (en justifiant) :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) + \sin(x))^2 - 1 = \sin(2x)$
   (c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 = -2$
   (d) Soit n un nombre entier. On a : n n'est pas multiple de 9 $\Rightarrow$ n n'est pas multiple de 3

Exercice 4

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Représenter sur le cercle trigonométrique ci-dessous les solutions du système suivant
$$\begin{cases} \cos(x) \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) > 0 \end{cases}$$
puis écrire les solutions du système appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$.



2. Mettre sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$ l' expression : $f(t) = -2\sin(3t)$.
3. Donner toutes les solutions sur $[0; \pi]$ de $\cos(4x) = 0$.
4. Donner toutes les solutions réelles de : $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = 1$
5. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 5 Soit n un entier et soit la propriété P_n : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

1. Justifier que $\cos((n+1)\pi) = -\cos(n\pi)$
2. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n est vraie.