Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 21 septembre 2018 - Durée : 1h45

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$$

1. Déterminer la dérivée de f.
$$f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{5}x^5 = -\infty$$
et
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{5}x^5 = +\infty$$
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
L'équation de la tangente s'écrit
$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= 4x + 1 \end{aligned}$$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. On détermine les valeurs qui annulent la dérivée en posnt $X = x^2$. On résout alors $X^2 - 5X + 4 = 0$.
On obtient $X = 4$ ou $X = 1$. Donc $X^2 - 5X + 4 = (X-4)(X-1)$.
La dérivée de f s'annule donc en -2,-1,1 et 2
$$f'(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$
On obtient donc le tableau de signes et de variations suivant :

	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
x^2-4		+		-		-		-		+	
x^2-1		+		+		-		+		+	
f'		+		-		+		-		+	
variantions de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f =]-1, 1[$.
   Pour que la foncon soit définie il faut que $1 - x^2 \geq 0$ (la racine d'un nombre strictement négatif n'est pas définie) et que $1 - x^2 \neq 0$ (interdiction de diviser par zéro). Il suffit donc de résoudre

   $$1 - x^2 > 0$$

   Les solutions sont $]-1, 1[$.
2. Déterminer la dérivée de f.

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{u'(x)}{u(x)^2} \qquad \text{avec} \qquad u(x) = \sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3. Déterminer les limites de f en -1 et en 1. Sachant que

   $$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$$

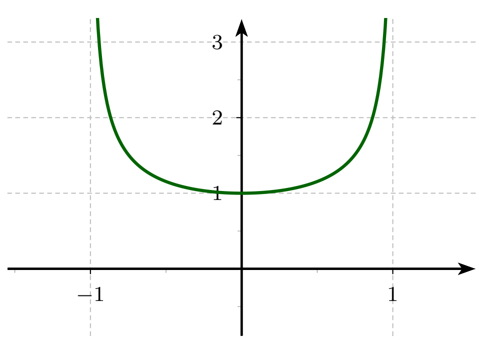
   Alors

   $$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f. f' est du signe de x, donc

	-1		0		$+1$
f'		-		+	
Δf		$\searrow$	1	$\nearrow$	

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.



Exercice 3 :

1. Donner la mesure principale des angles suivants :
   La mesure principale de l'angle est un angle qui est compris entre $-\pi$ et pi et qu iest égal modulo 2π.
   (a) $\dfrac{-49\pi}{4} = \dfrac{-48\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -12\pi - \dfrac{\pi}{4}$
   donc $\dfrac{-49\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
   La mesure principale de $\dfrac{-49\pi}{4}$ est $\dfrac{-\pi}{4}$.
   (b) $\dfrac{116\pi}{6} = \dfrac{58\pi}{3} = \dfrac{60\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = 20\pi - \dfrac{2\pi}{3}$
   donc $\dfrac{-116\pi}{6} = -\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
   La mesure principale de $\dfrac{116\pi}{6}$ est $\dfrac{-2\pi}{3}$.
   (c) $\dfrac{-17\pi}{2} = \dfrac{-16\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -8\pi - \dfrac{\pi}{2}$
   donc $\dfrac{-17\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
   La mesure principale de $\dfrac{-17\pi}{2}$ est $\dfrac{-\pi}{2}$.
   (d) $\dfrac{2018\pi}{3} = \dfrac{1800\pi}{3} + \dfrac{210\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 600\pi + 70\pi + 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$
   donc $\dfrac{2018\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
   La mesure principale de $\dfrac{2018\pi}{3}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.
2. Donner les valeurs de :
   (a) $\cos\left(-\dfrac{49\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\sin\left(-\dfrac{39\pi}{13}\right) = \sin\left(-3\pi\right) = 0$
   (c) $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$
   (d) $\tan\left(\dfrac{25\pi}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. Représenter (sans justifier), le plus précisément possible, sur le cercle trigonométrique ci-dessous les points M_i tels qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i}\right)$ est :

(a) $\dfrac{-98\pi}{8}$ (b) $\dfrac{5\pi}{6}$ (c) $-\dfrac{29\pi}{3}$ (d) $\dfrac{42\pi}{4}$

On peut simplifier les angles :

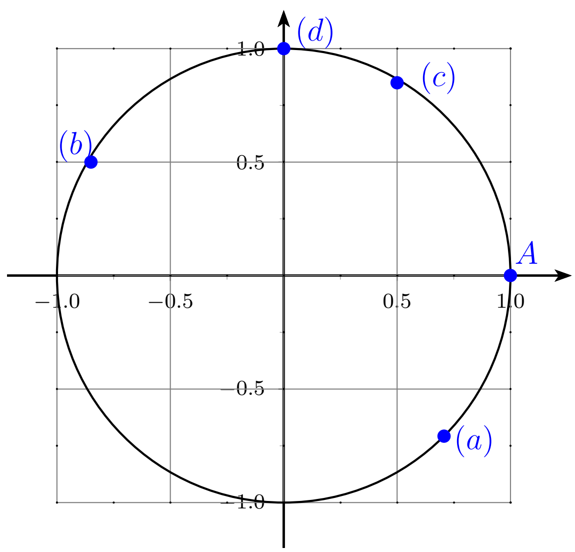
(a) $\dfrac{-98\pi}{8} = \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$

(b) $\dfrac{5\pi}{6}$

(c) $-\dfrac{29\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

(d) $\dfrac{42\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

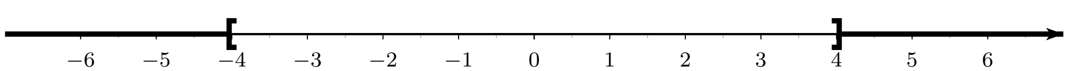
Et donc les placer précisément sur le cercle



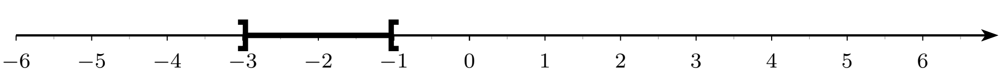
Exercice 4 :

1. Écrire les conditions suivantes avec un intervalle et représenter cet intervalle sur l'axe gradué :

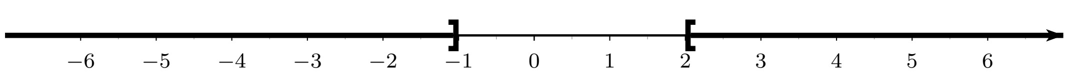
(a) $|x| > 4$ peut s'écrire $x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$



(b) $|x+2| < 1$ peut s'écrire $x \in]-3; -1[$



(c) $|2x-1| \geq 3$ peut s'écrire $x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$



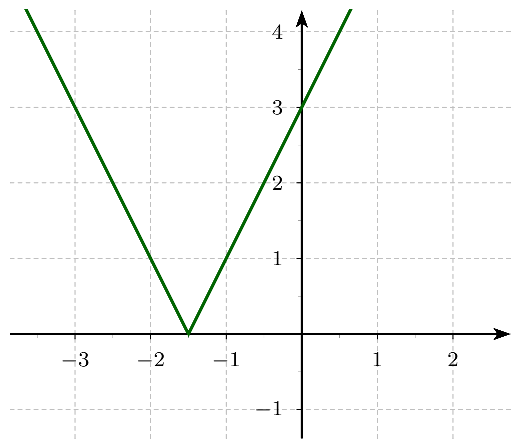
2. Écrire les conditions suivantes en utilisant une valeur absolue :

   (a) $-2 \leq x \leq 2$ peut s'écrire $|x| \leq 2$

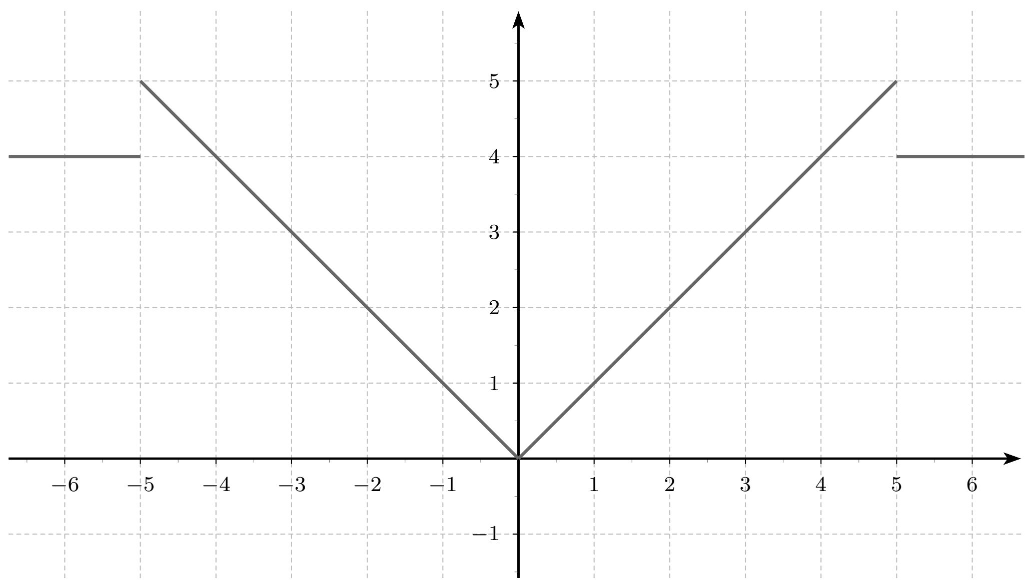
   (b) $-2 < x < 3$ s'interprète par : x est dans un intervalle de milieu $\frac{1}{2}$ et de largeur 5. Donc on peut écrire $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$.

3. Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = |2x+3|$



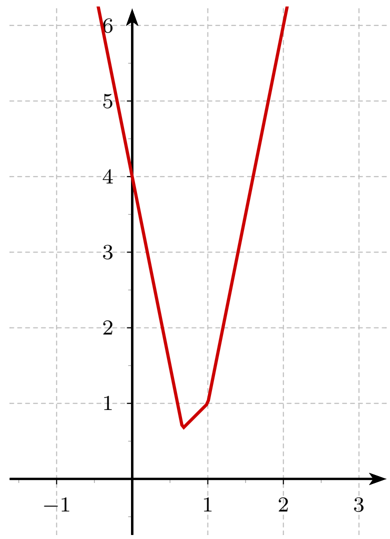
   (b) $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 5 \\ 4 & \text{si } |x| \geq 5 \end{cases}$



   (c) $h(x) = |2-3x| + 2|x-1|$.
   On utilise un tableau pour connaître l'expression de la fonction, sans valeur absolue, selon les valeurs de x :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$\lvert 2-3x\rvert$		$2-3x$		$3x-2$		$3x-2$	
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$		$x-1$	
$h(x)$		$-5x+4$		x		$5x-4$	

   On obtient donc le graphe suivant :


6
5
4
3
2
1
−1
1
2
3