Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 16 décembre 2016 - Correction

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Question du DS2 : Soit $Z_1 = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme algébrique de $(Z_1)^{10}$.
On ne développe pas ! On utilise la forme exponentielle de Z_1 :

$$\begin{aligned}
Z_1^{10} &= \left(\sqrt{3} - i\right)^{10} \\
&= \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} \\
&= 2^{10}e^{-i\frac{10\pi}{6}} \\
&= 1024e^{-i\frac{5\pi}{3}} \\
&= 1024e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= 1024\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 1024\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 512 + 512\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre $Z^2 + 2iZ - 1 = 0$.
   On a $\Delta = (2i)^2 + 4 = 0$, donc l'équation admet une unique solution : $Z = \dfrac{-2i}{2} = -i$
2. Résoudre $Z^2 + iZ - \dfrac{1+18i}{4} = 0$.
   On a $\Delta = i^2 + 4 \times \left(\dfrac{1+18i}{4}\right) = 18i$.
   Cherchons les racines carrées complexes de Δ : on pose $(\alpha + i\beta)^2 = 18i$:

$$\begin{aligned}
(\alpha + i\beta)^2 = 18i &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = 18i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta = 18 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 18 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ 2\alpha\beta = 18 \\ 2\beta^2 = 18 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 3 \\ \alpha\beta > 0 \\ \beta = \pm 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc les racines carrées de Δ sont $3+3i$ et $-3-3i$.
Les solutions de l'équations sont donc

$$Z_1 = \frac{-i-3-3i}{2} = -\frac{3}{2} - 2i$$

et

$$Z_2 = \frac{-i+3+3i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes.

   (a) On enlève la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ »en factorisant par $(x-2)$:

   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x-1 = 1$$

   (b) Il n'y a pas de forme indéterminée (la limite est de la forme « $\frac{0}{2}$ »), donc

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = 0$$

   (c) On enlève la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ »en ne gardant que les monômes de plus haut degré :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+2}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

   (d) On reconnaît le calcul d'un nombre dérivé :

   $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \frac{1}{3}$$

   avec $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et donc $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

2. Les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ sont équivalentes en $+\infty$. En effet

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Exercice 3 Soient les fonctions : $u(t) = \dfrac{1}{t+2}$, $v(t) = \sin(t)$ et $w(t) = t^2$.

1. Déterminer $f(t) = u \circ v \circ w(t)$.

   $$f(t) = u \circ v \circ w(t) = \frac{1}{\sin(t^2+2}$$

2. La fonction f est paire. En effet

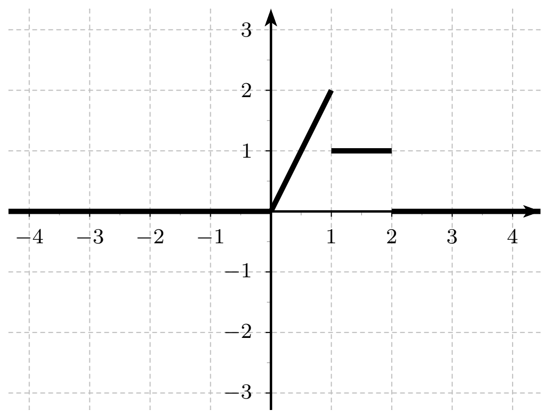
   $$f(-t) = \frac{1}{\sin((-t)^2+2} = \frac{1}{\sin((t)^2+2} = f(t)$$

3. La fonction $g(t) = \sin\left(\dfrac{1}{t^2+2}\right)$ peut s'écrire :

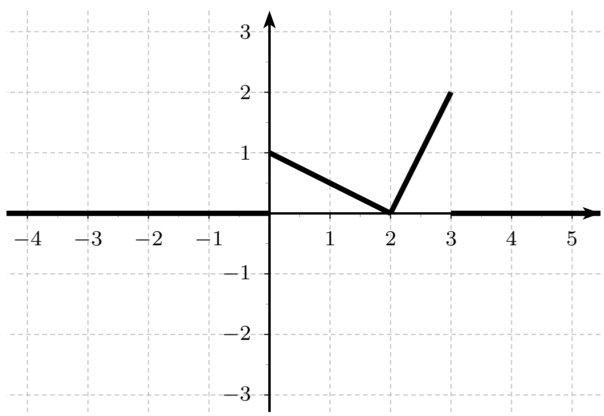
$$g(t) = v \circ u \circ w(t)$$

Exercice 4

1. Sur le graphique ci-dessous, on trace le graphe de $f(t) = 2t\mathcal{U}(t) - (2t-1)\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$.



2. Soit la fonction g dont le graphe est



Une écriture de g avec la fonction échelon est

$$g(t) = \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\mathcal{U}(t) + \left(\frac{5}{2}t - 5\right)\mathcal{U}(t-2) + (-2t+4)\mathcal{U}(t-3)$$

Exercice 5 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la fonciton

$$f(t) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 2 \text{ si } & x > a \\ x^2 + x + 1 \text{ si } & x \leq a \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit continue en a.
   On calcule les limites à gauche et à droite de a :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} 2x^2 + 3x + 2 = 2a^2 + 3a + 2$$

   et

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} x^2 + x + 1 = a^2 + a + 1$$

   On veut que les limites soient les mêmes. On résout donc

$$2a^2 + 3a + 2 = a^2 + a + 1 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

   Donc la fonction f est continue en a si et seulement si $a = -1$.
2. Pour la valeur de a déterminée à la question 1, la fonction f est-elle dérivable en a?

   On calcule le nombre dérivé à gauche et à droite de -1 :

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 + 3x + 2 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(2x+1)}{x+1} = -1$$

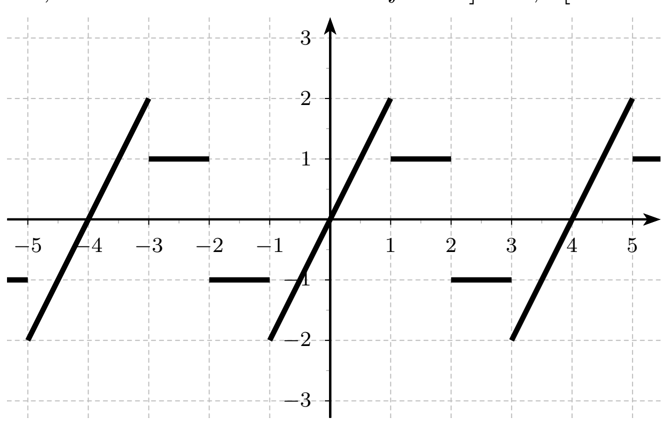
   et

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1$$

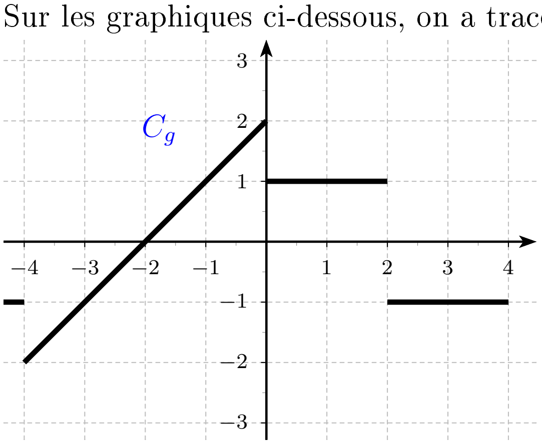
   Donc f est dérivable en -1.

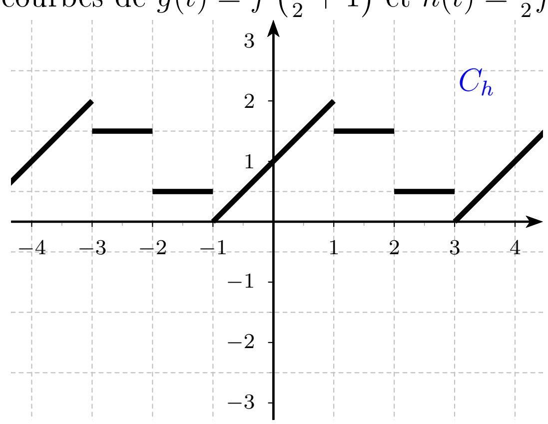
Exercice 6 Soit la fonction f impaire et 4 périodique définie sur $]0;2[$ par

1. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe de f sur $]-5;5[$.

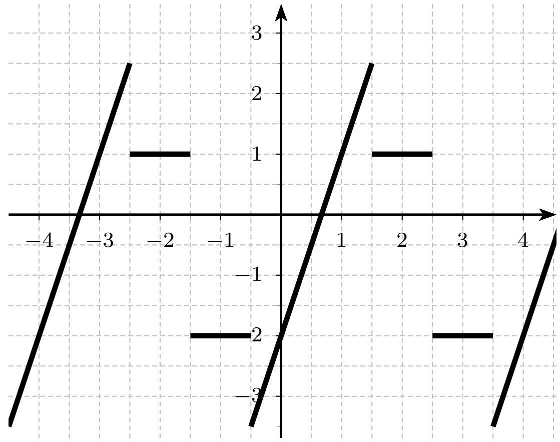


2. Sur les graphiques ci-dessous, on a tracé les courbes de $g(t) = f\left(\frac{t}{2} + 1\right)$ et $h(t) = \frac{1}{2}f(t) + 1$





3. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe de $k(t) = af(bt + c) + d$. Déterminer les valeurs de a, b, c et d.



On observe que le signal k n'a pas une valeur moyenne nulle. Pour le recentrer verticalement il faut remonter de $0,5$ donc $d = -\dfrac{1}{2}$.

L'amplitude du signal k est de 3, alors que l'amplitude de f est de 2. Donc $a = \dfrac{3}{2}$.

On observe que le signal k est le signal f décalé vers la droite de $\dfrac{1}{2}$ donc $c = -\dfrac{1}{2}$.

La période du signal k est la même que celle de f. Donc $b = 1$.

Conclusion :

$$k(t) = \frac{3}{2} f\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$