Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Correction
Vendredi 17 décembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $y'(t) + 3y(t) = 2t + 1$

   On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'(t) + 3y(t) = 0 \tag{EHA1}$$

   Les solutions de (EHA1) sont de la forme :

$$y_H(t) = Ce^{-3t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

   On cherche une solution particulière ; comme le second membre est un polynôme du premier degré, on cherche une solution particulière de la forme : $y_P(t) = At + B$. On a alors $y_P'(t) = A$ et en remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$A + 3(At + B) = 2t + 1 \Leftrightarrow 3At + A + 3B = 2t + 1$$

   et par identification, on a :

$$\begin{cases} 3A = 2 \\ A + 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ 3B = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

   Donc $y_P(t) = \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}$ est une solution particulière. Les solutions sont donc de la forme :

$$y(t) = Ce^{-3t} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = \cos(2t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

   On commence par résoudre l'équation homogène associée. On reconnaît (EHA1) de la question précédente.

   On cherche donc un solution particulière ; comme le second membre est un fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. On a alors $y_P'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ et en remplaçant dans l'équation, on a :

$$-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + 3A\cos(2t) + 3B\sin(2t) = \cos(2t)$$

   et par identification, on obtient :

$$\begin{cases} -2A + 3B = 0 & (1) \\ 3A + 2B = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A + 3B = 0 & (1) \\ 2A + \frac{4}{3}B = \frac{2}{3} & (2) \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A + 3B = 0 & (1) \\ \frac{13}{3}B = \frac{2}{3} & (2) \times \frac{2}{3} + (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2}B = \frac{3}{13} \\ B = \frac{2}{13} \end{cases}$$

Donc $y_P(t) = \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t)$ est une solution particulière et les solutions sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t), \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

On prend maintenant en compte la condition initiale $y(0) = 2$. On a :

$$y(0) = C + \frac{3}{13} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{23}{13}.$$

L'unique solution est alors :

$$y(t) = \frac{23}{13}e^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

2. Donner une équation différentielle du premier ordre qui admette $f(t) = e^{-2t}$ comme solution.
   On a $f'(t) = -2e^{-2t}$ et

   $$f'(t) - 3f(t) = -2e^{-2t} - 3e^{-2t} = -5e^{-2t}$$

   Donc f est solution de l'équation différentielle $y'(t) - 3y(t) = -5e^{-2t}$.
3. Résoudre en fonction de U, R et L l'équation : $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U$ avec $i(0) = 0$.
   On commence par résoudre l'équation homogène associée :

   $$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \tag{EHA2}$$

   Les solutions de (EHA2) sont de la forme :

   $$i_H(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

   On cherche une solution particulière ; comme le second membre est une constante, on cherche une solution particulière de la forme : $i_P(t) = A$. On a alors $i'_P(t) = 0$ et en remplaçant dans l'équation, on obtient :

   $$RA = U \Leftrightarrow A = \frac{U}{R}.$$

   Donc $i_P(t) = \frac{U}{R}$ est une solution particulière et les solutions sont de la forme :

   $$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

   On prend maintenant en compte la condition initiale $i(0) = 0$. On a :

   $$i(0) = C + \frac{U}{R} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{U}{R}.$$

   L'unique solution est alors :

   $$i(t) = -\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

4. Résoudre l'équation : $ty'(t) + 2y(t) = 0$.

   Il s'agit d'une équation homogène à coefficients non constants. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-F(t)}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

   avec

$$F(t) = \int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt = 2\ln(|t|) = \ln(t^2).$$

   Donc les solutions sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-ln(t^2)} = \frac{C}{e^{\ln(t^2)}} = \frac{C}{t^2}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 ***(20 minutes)***

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \frac{2}{(t-1)(t-2)}$

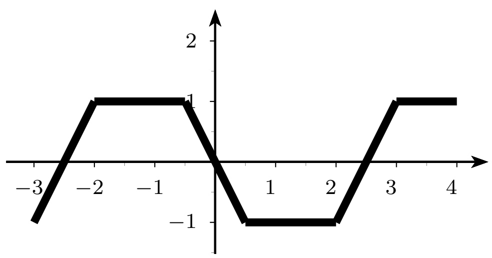
   La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$. Comme l'ensemble D_f n'est pas symétrique par rapport à 0, f n'est ni paire, ni impaire.

   (b) $g(t) = \cos^2(4t) - \sin^2(4t)$

   La fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R}$.

$$g(-t) = \cos^2(-4t) - \sin^2(-4t) = \cos^2(4t) - (-\sin(4t))^2 = \cos^2(4t) - \sin^2(4t) = g(t)$$

   Donc la fonction g est paire.

   (c) 

   La fonction représentée ci-dessus est symétrique par rapport à l'origine, elle est donc impaire.

2. Déterminer les périodes des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \cos(6\pi t + \pi)$

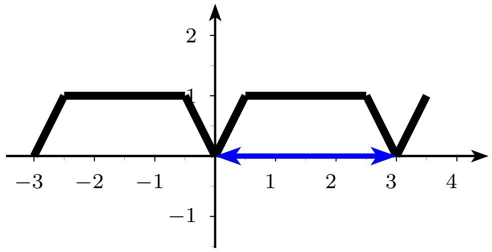
$$T_f = \frac{2\pi}{w_f} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

   (b) $g(t) = \sin(8t + \frac{\pi}{3}) + \sin(12t)$

   La période de $\sin(8t + \frac{\pi}{3})$ est $T_1 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.
   La période de $\sin(12t)$ est $T_2 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.
   Comme $T_1 \neq T_2$, la période de g est

$$T_g = \text{ppcm}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = \text{ppcm}\left(\frac{3\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}\text{ppcm}\,(3,2) = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

(c) $h(t) = h_2(\frac{t}{2})$ sachant que la fonction h_2 est $2-$périodique.
On obtient h à partir de h_2 en effectuant une dilatation du temps de facteur $\frac{1}{2}$. Le temps passe donc 2 fois plus lentement et la période est multipliée par 2. Comme h_2 est de période 2, on a $T_h = 4$.

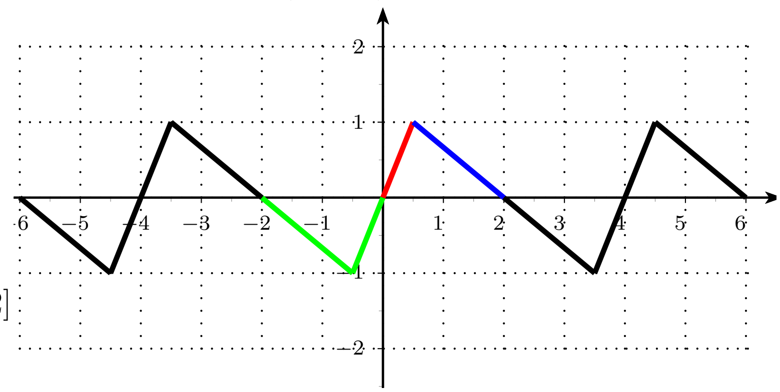
(d)


La fonction représentée est de période 3.

3. Tracer sur $[-6, 6]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

(a) f est impaire
(b) f est de période 4
(c) sur $[0, 2]$ on a

$$f(t) = \begin{cases} 2t \quad \text{si} \quad t \in [0, 0.5] \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \quad \text{si} \quad t \in [0.5, 2] \end{cases}$$



On commence par tracer la droite d'équation $y = 2t$ sur l'intervalle $[0, 0.5]$ (ici en rouge). Pour cela, on a besoin de deux points. En $t = 0$, $y = 2 \times 0 = 0$ et en $t = 0.5$, $y = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
On trace ensuite la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}$ sur l'intervalle $[0.5, 2]$ (ici en bleu). De nouveau, on a besoin de deux points. En $t = 0.5$, $y = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$ et en $t = 2$, $y = -\frac{2}{3} \times 2 + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$.
La fonction f étant impaire, on effectue une symétrie centrale par rapport à l'origine pour obtenir la fonction sur l'intervalle $[-2, 0]$ (portion en vert). On a ainsi la fonction sur l'intervalle$[-2, 2]$ qui est de longueur 4 ; comme la fonction est de période 4, il suffit maintenant de répéter le motif.

Exercice 3 ***(10 minutes)*** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(2t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(2t)$.

1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

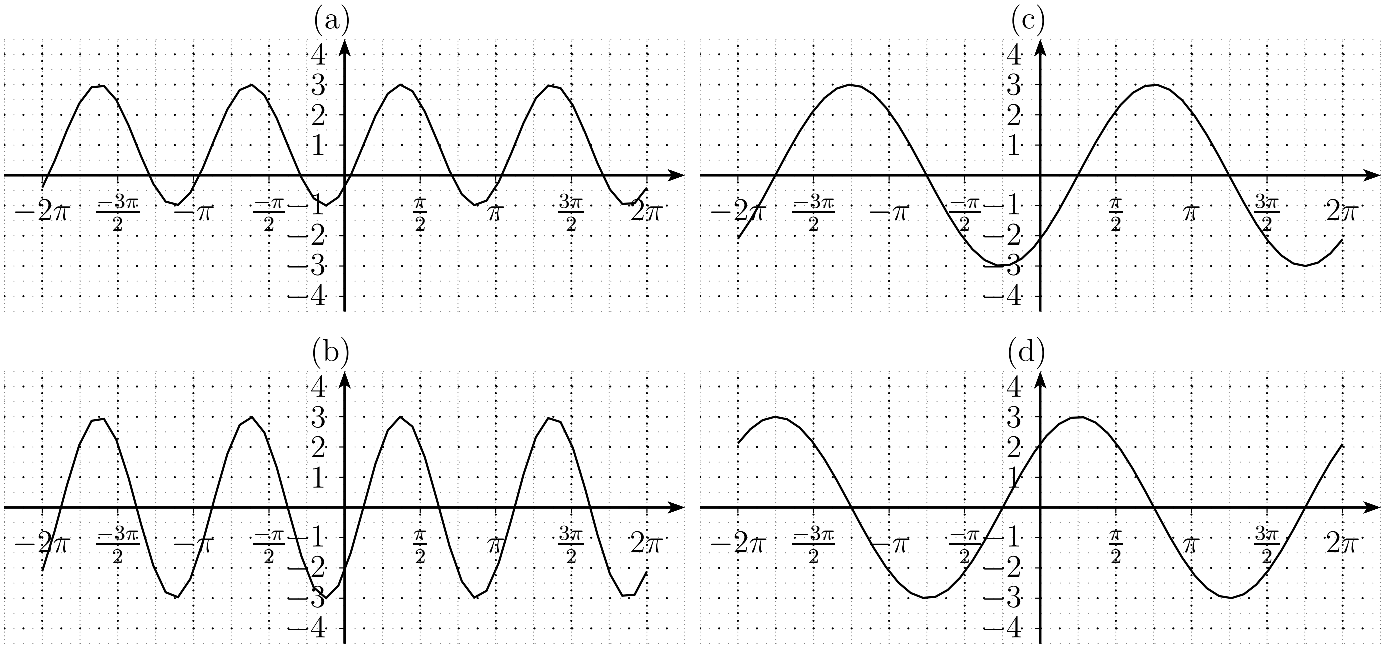
On cherche l'angle $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{b}{A} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{a}{A} = \frac{-\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ et $f(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Déterminer la périodicité et l'amplitude de la fonction f.
La période de la fonction f est $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
D'après la question précédente, l'amplitude de la fonction f est $A = 3$.

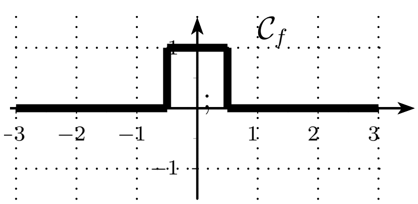
3. Parmi les courbes suivantes, indiquer en justifiant votre réponse, celle qui correspond à la courbe représentative de f.

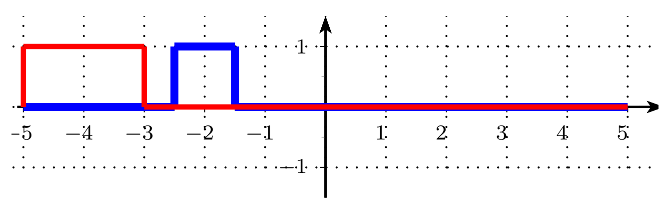


L'amplitude de la courbe (a) est égale à 2, ce n'est donc pas la courbe représentative de f (qui a une amplitude de 3). Les courbes (c) et (d) ont une période de 2π, ce qui ne convient pas puisque f est π-périodique. La courbe représentative de f correspond donc à la courbe (b).

Exercice 4 ***(10 minutes)***

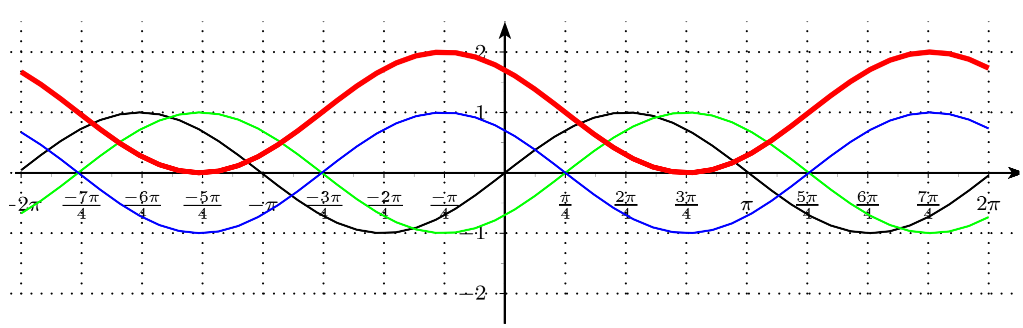
1. La fonction créneau unité f est représentée ci-dessous. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci- dessous la courbe représentative de la fonction $f_1(t) = f(\frac{1}{2}t + 2)$





Pour obtenir la courbe représentative de f_1 à partir de celle de f, on commence par appliquer une avance de 2, on décale donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de 2 vers la gauche (représentée en bleu). On applique ensuite une dilatation de facteur $\frac{1}{2}$. La distance entre l'axe des ordonnées et chaque point de la courbe bleue est alors multipliée par 2 (courbe représentée en rouge).

2. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f_2(t) = -\sin(t - \frac{\pi}{4}) + 1$



Pour obtenir la courbe représentative de f_2, on part de la courbe du sinus (représentée en noir). On applique ensuite un retard de $\frac{\pi}{4}$, on décale donc la courbe noire de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite. On obtient la courbe verte. On prend ensuite en compte le facteur -1 devant le sinus, pour cela, on fait la symétrie de la courbe verte par rapport à l'axe des abscisses. On obtient la courbe bleue. On applique finalement l'offset de $+1$ qui décale la courbe bleue de 1 vers le haut. On obtient finalement la courbe rouge.

Exercice 5 ***(15 minutes)*** Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = (3+5i) - (2-3i) = 3 + 5i - 2 + 3i = 1 + 8i$
2. $z_2 = \overline{(2-i)(2i+1)} = \overline{2-i}\ \overline{2i+1} = (2+i)(1-2i) = 2 - 4i + i + 2 = 4 - 3i$
3. $$z_3 = \frac{2-6i}{1+4i} = \frac{(2-6i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{2-8i-6i-24}{1^2+4^2} = \frac{-22-14i}{17}$$
4. $z_4 = (1-3i)(3+2i)(4-i) = (3+2i-9i+6)(4-i) = (9-7i)(4-i) = 36 - 9i - 28i - 7 = 29 - 37i$