Mathématiques

Semestre 1

Travaux Dirigés
Mathématiques

Année 2023–2024

Nom :
Prénom :
Groupe :

Table des matières

Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation.
Arthur Ashe

Chapitre 1

Rappels de calcul littéral

Exercice 1

1. Donner une écriture sous forme d'une fraction irréductible :

   (a) $A = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

   (b) $B = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$.

   (c) $C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}$.

   (d) $D = \frac{\frac{1}{2}}{3}$

   (e) $E = \frac{1}{\frac{2}{3}}$

   (f) $F = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

   (g) $G = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.

   (h) $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

   (i) $I = \frac{\alpha^3}{\alpha^5 + \alpha^7}$

2. Écrire sous la forme $E + \frac{P}{Q}$ où E est un nombre entier et $\frac{P}{Q}$ est une fraciton irréductible :

   (a) $A = \frac{219}{12}$

   (b) $B = 42,3 + \frac{31}{5}$

   (c) $C = \frac{R_1R_2 + R_1^2}{R_1R_2}$

Exercice 2

1. Simplifier les écritures :

   (a) $A = \sqrt{128} - 3\sqrt{8}$

   (b) $B = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$

   (c) $C = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{4})$

2. Pour chaque égalité remplacer les ... par une valeur numérique (enitère ou pas)

   (a) $2^{20} + 2^{20} + 2^{20} + 2^{20} = 2^{\cdots}$

   (b) $\left(10^5\right)^3 = 10^{\cdots}$

   (c) $10^{-6}\frac{\left(10^2\right)^4 \times 10}{10^{-3} \times 10^5} = 10^{\cdots}$

   (d) $\frac{2 \times 10^6 + 5 \times 10^7}{10^8} = 52 \times 10^{\cdots}$

   (e) $\frac{31^2 + 31}{31} = \ldots$

   (f) $\frac{50^{100}}{100^{50}} = 25^{\cdots}$

   (g) $(e^2 + e^{-2}) \times (e^2 - e^{-2}) = \ldots$

   (h) $e^3 \times e^5 \times e^{-4} = \ldots$

   (i) $\frac{e^2\left(e \times \frac{1}{e^{-2}}\right)}{e^4 \times e^2 \times e^{-4}} = e^{\cdots}$

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $2x-7=3x+8$

   (b) $3(x+5)=-4x$

   (c) $\dfrac{x-3}{4}=2x$

   (d) $\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{5}$

   (e) $\dfrac{1}{x+2}=3$

   (f) $\dfrac{x+2}{x-4}=7$

   (g) $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{4}{3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}=-2$

2. On considère l'expression suivante : $\dfrac{a-b}{\alpha c}=ab$. Déterminer a en fonction de b, c et α.

3. On considère l'expression suivante : $\dfrac{1}{\alpha c}+\dfrac{a}{a+c}=ab$. Déterminer α en fonction de a, b et c.

4. On considère l'expression suivante : $\dfrac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\gamma$. Déterminer a en fonction de b, α, β et γ.

Exercice 4

1. Tracer les droites représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x)=-2x+1$,

   (b) $g(t)=-\frac{1}{2}t+3$,

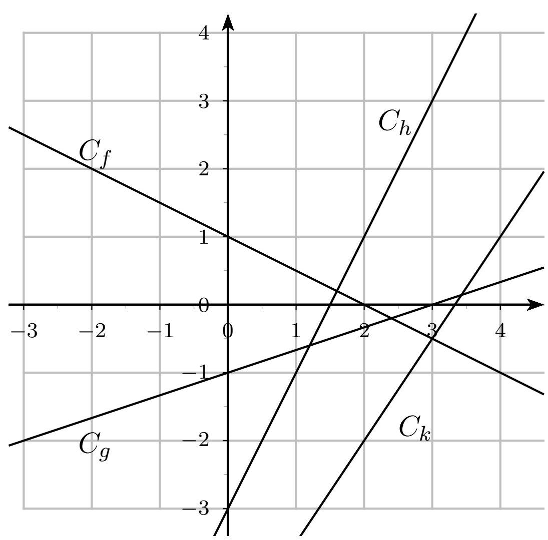
   (c) $h(x)=\dfrac{x}{3}$,

   (d) $k(t)=-\dfrac{(t+1)}{4}$,

   (e) $l(x)=3$.

   (f) $U(i)=Ri$ avec $R=50(\Omega)$.

2. Donner les équations de chacune des droites suivantes :



Exercice 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^5-7x^3+32x^2+19$
2. $f(t)=\dfrac{3t^3+3t^2+3t}{5}$
3. $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-2}$
4. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x}$
5. $f(\theta)=\sin(-5\theta)$
6. $f(t)=3te^{\frac{t}{2}}$
7. $f(t)=\cos(t)\sin(t)$
8. $f(t)=\cos(3t)\sin(2t)$
9. $f(t)=t\cos(2t-5)$
10. $f(s)=e^{-\frac{1}{3}s}$
11. $f(t)=\ln(3t+5)$
12. $f(t)=a\cos(3t)+b\sin(3t)$
13. $U(t)=Ri$
14. $U(i)=Ri$

Compléments

Exercice 6

1. Simplifier les écritures :

   (a) $A = \sqrt[3]{64}$

   (b) $B = \left(16^3\right)^{\frac{1}{4}}$

   (c) $C = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

2. Pour chaque égalité ou inégalité, dire si elle est vraie ou fausse.

   (a) $\dfrac{\frac{1}{RC\omega}}{1+\frac{1}{RC\omega}} = \dfrac{1}{1+RC\omega}$

   (b) $\dfrac{3,0003}{2,0002} = 1,5001$

   (c) $2^{39} < 3^{26} < 10^{13}$

   (d) $\sqrt{12}+\sqrt{75} = \sqrt{147}$

   (e) 8=le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2048×25^4

3. résoudre l'équation $\sqrt{12}+\sqrt{75} = \sqrt{147}$

Exercice 7 Tracer les droites représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{2(x+1)}{5}$,
2. $g(t) = -\dfrac{7}{3}t + \dfrac{1}{3}$,
3. $h(x) = \dfrac{x}{3} + 2x - 5$,

Exercice 8

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^5-7x^3)\times(3x^2+9)$
2. $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-2x}$
3. $f(t) = \sqrt{t}e^{3t}$
4. $f(t) = 2t\cos(3t)\sin(4t)$
5. $f(t) = \frac{1}{t} \times \ln(3t+5)$

Chapitre 2

Logique et notations mathématiques

Exercice 1 ***Un peu de logique***

Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes en langage propositionnel. On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe.

1. Si la caravane passe alors les chiens aboient
2. Les chiens n'aboient pas
3. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient
4. Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas

Exercice 2

Pour chaque égalité ou inégalité, dire si elle est vraie ou fausse.

1. Quels que soient x et y deux entiers naturels, $\dfrac{x}{y+1}$ est plus petit que $\dfrac{2x}{2y+1}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^4 + x^3 + x^2 + x = x^{10}$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ on a $\dfrac{x+7}{x+3} = \dfrac{7}{3}$
4. Quels que soient a, b et c non nuls, on a $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{\frac{b}{c}}$

Exercice 3 ***Implication VS équivalence***

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = 4 \ldots x = 2$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = 1 \ldots x = 0$
3. Soient a et b deux réels : $a > 0$ et $b > 0 \ \ldots \ ab > 0$
4. Soient a et b deux réels : $a = b \ldots a^2 = b^2$
5. Soient a et b deux réels : $a = b \ldots a^3 = b^3$

Exercice 4 ***Quantificateurs***

1. La fonction f des propriétés suivantes est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) f est la fonction nulle.

(b) f est la fonction identité (la fonction qui, à chaque r'eel, associe lui-même).
(c) Le graphe de f coupe la droite d"equation $y = x$.
(d) Le graphe de f est toujours au dessus de la droite $y = -3$.

2. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) Toutes les voitures rouges sont rapides.
   (b) Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.
   (c) Il y a un entier qui est plus grand que tous les autres (cette affirmation est fausse)
   (d) N est un entier pair.

Exercice 5 ***Quantificateurs***

Soit f une fonction de $D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D \;\; f(x) \leq M. \tag{2.1}$$

1. Traduire et expliquer cette phrase mathématique.
2. Cette phrase est elle équivalente à

$$\forall x \in D \;\; \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \leq M. \tag{2.2}$$

3. Traduire et expliquer (2.2)
4. Donner la négation de (2.1).

Exercice 6

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, la fonction $h_j(x)$ donne son heure de réveil le jour j.

1. écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Exercice 7 ***Quantificateurs***

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en argumentant la réponse.
   (a) P_1 : « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y > x^2$ ».
   (b) P_2 : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 < x$ ».
   (c) P_3 : « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 \geq x$ ».
2. La négation de la proposition P_2 est elle P_3 ?

Exercice 8 ***Contraposée***

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$
4. $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ on a : $x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$

Exercice 9 ***Logique encore***

Déterminer les raisonnements qui sont logiquement valides :

1. Tous les élèves sont charmants. Or Edouard est charmant. Donc Edouard est un élève.
2. Edouard est un élève. Or tous les élèves sont charmants. Donc Edouard est charmant.
3. Aucun élève n'est charmant. Or Edouard n'est pas charmant. Donc Edouard est un élève.
4. Aucun élève n'est charmant. Or Edouard est un élève. Donc il n'est pas charmant.
5. La plupart des élèves s'appellent Edouard. Or tous les Edouard sont charmants. Donc certains élèves sont charmants.
6. Tous les élèves s'appellent Edouard. Or certains Edouard ne sont pas charmants. Donc certains élèves sont charmants

Exercice 10 ***Vrai ou Faux***

Le but de cet exercice est de déterminer, pour chacune des assertions, si elle est vraie ou fausse.

Rappel : Pour démontrer qu'une assertion est fausse, on donne un exemple qui met cette assertion en défaut. Dans ce cas, il s'agit d'un contre-exemple.

Pour démontrer qu'une assertion est vraie, on établit un raisonnement dans lequel chaque étape doit étre justifiée (y compris celles qui paraissent, dans un premier temps, évidentes).

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2.$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^3 = x^3 + y^3.$
3. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^3 = x^3 + y^3.$
4. $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}.$
5. Il n'existe pas d'équation qui admette exactement cinq solutions réelles distinctes.
6. $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, le nombre $A = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

Exercice 11 ***Symbole Sigma***

1. Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ en faisant disparaitre ce symbole :

   (a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$ (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{l=1}^{10} \frac{1}{2l+1}$ (c) $S_3 = \displaystyle\sum_{p=1}^{10} \frac{1}{2l}$ (d) $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} 1$

2. écrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.

   (a) $S_1 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{10}$ (b) $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + 14^2$ (c) $S_3 = 3^2 + 4^2 + \cdots + 103^2 + 104^2$

Exercice 12 ***Symbole Sigma***

Traduire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

1. $S_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{48}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{64}$
3. $S_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots - \dfrac{1}{28}$
4. $S_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{9}{10} + \dfrac{10}{11}$
5. $S_5 = 1^2 + 3^2 + 5^2 \cdots + 13^2 + 15^2$
6. $S_6 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + \ldots + 12 \times 14$

Compléments

Exercice 13 ***Un peu de logique***

On suppose vraie l'implication suivante : il pleut $\Rightarrow$ je prends mon parapluie.

1. S'il ne pleut pas, prends-je mon parapluie ?
2. Aujourd'hui j'ai pris mon parapluie ; est ce qu'il pleut ?
3. Hier je n'ai pas pris mon parapluie, a-t-il plu ?

Exercice 14

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés suivants :

a)$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$ b)$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$ c)$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = y$

Exercice 15 ***Extrait de DS 2018***

Les questions 1 et 2 sont ind'ependantes.

1. Écrire les sommes suivantes avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 625$ (indication : $\sqrt{625} = 25$)
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{83}$
2. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :
   (a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\ t.q.\ x \times y \geq 1$
   (b) $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ on a : $x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$

Exercice 16

Soit $a > b$. Considérons $c = a - b$, donc $a = b + c$. Par conséquent, $a(a - b) = (b + c)(a - b)$ donc $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$. Alors $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$ et $a(a - b - c) = b(a - b - c)$. Et finalement $a = b$!

Où est l'erreur ?

Exercice 17 ***7***

Dans cet exercice k et k' sont deux entiers, x un réel et f une fonction.

On considère les 3 propriétés suivantes

- P_1 : $\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2 : k \neq 1$ ou $k' \neq 1 \Rightarrow k \times k' \neq 1$.
- P_2 : $\forall x \in \mathbb{R} : -|-x^2| < 0$.
- P_3 : $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in R$ tel que $f(x) \neq C$.

1. Donner la contraposée de la propriété P_1.
2. La proposition P_1 est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
3. La proposition P_2 est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
4. Donner la négation de P_3 avec des quantificateurs. Quelle propriété graphique vérifie une fonction qui satisfait non P_3 ?

Exercice 18

1. Ecrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.

(a) $S_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{48}$ (b) $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{64}$ (c) $S_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots - \dfrac{1}{28}$

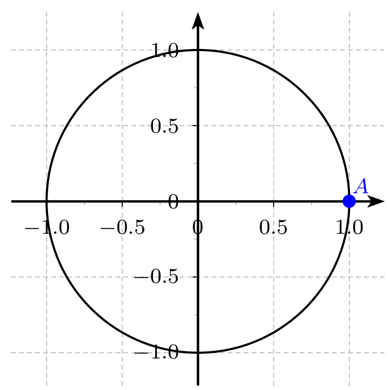
2. Donner la valeur exacte des sommes

(a) $S_4 = \displaystyle\sum_{n=2}^{8} 3 \times 2^n$ (b) $S_5 = \displaystyle\sum_{k=3}^{5} \frac{k-1}{2k}$

Chapitre 3

Trigonométrie

Exercice 1 Représenter sur le cercle trigonométrique les points M_i tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ soit $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{29\pi}{3}$, $\dfrac{41\pi}{6}$, $\dfrac{367\pi}{2}$, $-\dfrac{26\pi}{8}$.



Exercice 2

Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

1. $\dfrac{17\pi}{2}$
2. $-\dfrac{23\pi}{4}$
3. $\dfrac{39\pi}{3}$
4. $\dfrac{345\pi}{6}$
5. $-\dfrac{367\pi}{5}$
6. $\dfrac{45367\pi}{20}$

Exercice 3

Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

1. $\cos\left(\dfrac{25\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{258\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(\dfrac{12345\pi}{4}\right)$
5. $\sin\left(\dfrac{335\pi}{6}\right)$
6. $\sin\left(\dfrac{211\pi}{4}\right)$

Exercice 4

1. Donner l'ensemble des nombres de $[-\pi; \pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$
2. Donner l'ensemble des nombres de $[0; 2\pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) \qquad B = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \qquad C = \sin(257\pi + x).$$

Exercice 6

1. Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

   (a) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (c) $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2. Soit $x \in [\pi; 2\pi]$. Sachant que $\cos(x) = \frac{3}{5}$, déterminer la valeur de $\sin(x)$

Exercice 7

Mettre les expressions suivantes sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ où $A > 0$.

1. $f(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$
2. $g(t) = -\sqrt{3}\sin(t) + \cos(t)$
3. $h(t) = \cos(\pi t)$
4. $k(t) = -3\sin(2t)$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis donner les solutions dans l'intervalle I :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $I = [0; 2\pi]$
2. $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [-\pi; \pi]$
3. $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $I = [-\pi; \pi]$
4. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$, $I = [0; 2\pi]$
5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [0; 2\pi]$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques :

1. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
2. $\sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{3}$
3. $\sin(2x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$
4. $\cos(2x) = \sin(x)$

Exercice 10

Résoudre sur $[0; 2\pi]$ les inéquations suivantes à l'aide du cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$
2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$
3. $\cos(x) \leq \sin(x)$
4. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$

Exercice 11

1. Déterminer

   (a) $\arctan(1)$
   (b) $\arctan(-1)$
   (c) $\arctan(0)$
   (d) $\arctan(\sqrt{3})$
   (e) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
   (f) $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t)$
   (g) $\lim_{t\to-\infty} \arctan(t)$

2. Déterminer

   (a) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$
   (b) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$
   (c) $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
   (d) $\arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$
   (e) $\tan(\arctan(2))$
   (f) $\tan(\arctan(-5))$

Compléments

Exercice 12
Soit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2. Montrer que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
3. Montrer que $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$
4. En déduire une formule pour $\tan(2x)$

Exercice 13
Montrer que, pour tout $x > 0$ on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 14

1. Montrer que pour tout x de la forme $x = \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.
2. Sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ calculer $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 15
Soit la fonction réelle $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$.

1. Mettre f sous la forme $A\sin(2x + \varphi)$ avec $A > 0$. Quelle est la valeur maximale de f ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 16

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler la formule de $\cos(a + b)$.
2. Montrer que $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 17

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Justifier soigneusement** les réponses.

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\sin\left(\pi t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$
3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 1$
4. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{k\pi}{2} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos\left(\pi - t\right) \times \cos\left(\pi + t\right)$$

Exercice 18

Déterminer (justifier soigneusement vos réponses) :

1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
2. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
3. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$
4. $\tan\left(\arctan\left(10^{-6}\right)\right)$
5. $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan(t) + \arctan(-t)$

Chapitre 4

Equations différentielles

Exercice 1 ***Vérification***

1. Soit E une constante réelle. La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(t) = E(1-e^{-2t})$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?
$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = E$$
2. La fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?
$$y'(x) + \frac{(y(x))^2}{x+3} = \frac{1}{x-2}$$

Exercice 2 ***Équations différentielles et primitives***

Résoudre les équations suivantes :

1. $5y'(t) = 0$
2. $\dfrac{du}{dt}(t) = 470$
3. $u'(t) = \dfrac{I}{C}$
4. $3y'(t) = 2t$
5. $3y''(t) = 4$
6. $\dfrac{du}{dt}(t) = R$ avec $u(0) = 12$.

Exercice 3 ***Équations homogènes***

Résoudre les équations suivantes :

1. (a) $y'(t) + 2y(t) = 0$ (b) $2y'(t) - 3y(t) = 0$
2. (a) $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2y'(t) - 3y(t) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Exercice 4 ***Équations non homogènes***

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $y'(t) - 2y(t) = 3$ (b) $4y'(t) - 3y(t) = 5t$

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4y'(t) - 3y(t) = 5t \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = -2\cos(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2y'(t) + y(t) = 5e^{-2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 5 ***Équation non homogène : cas particulier***

Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} 2y'(t) - 4y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 ***Équations homogènes à coefficients non constants***

Résoudre les équations suivantes :

1. $(1+t^2)y'(t) + ty(t) = 0$,
2. $(1+t^3)y'(t) = t^2y(t)$ avec $y(1) = 2$,
3. $(t-1)y'(t) - (2t-1)y(t) = 0$.

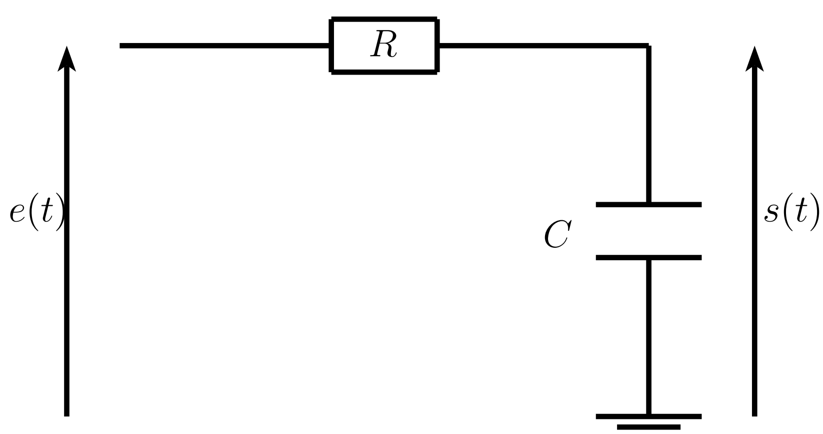
Exercice 7 ***On connaît la réponse***

1. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ comme solution.
2. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{3t} + 2$ comme solution.
3. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{4}} + 2t - 1$ comme solution.
4. Donner une équation différentielle qui admette $f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ comme solution.

Compléments

Exercice 8 ***Lien avec le génie électrique***

On considère le circuit RC suivant :



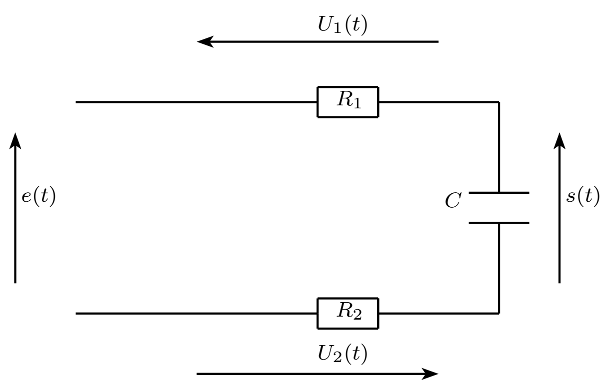
Avec C non chargé initialement ;

1. Justifier que l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ est
$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$
où $\tau = RC$.
2. On considère que la tension d'entrée est constante : $e(t) = E$.
   (a) Résoudre l'équation en fonction de E, R et C.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de s au point d'abscisse 0 (en fonction de E, R et C).
   (c) Montrer que le point d'abscisse τ de T appartient à l'asymptote en $+\infty$ de C_s (la courbe représentative de f).
   (d) Quelle durée T (en fonction de τ) faut-il attendre pour que s atteigne la valeur $0.95E$?
   (e) Si $C = 10\mu F$, $R = 1000\Omega$ et $E = 10V$, calculer $s(t)$ et représenter son graphe.

Exercice 9 ***Extrait de DS 2019***

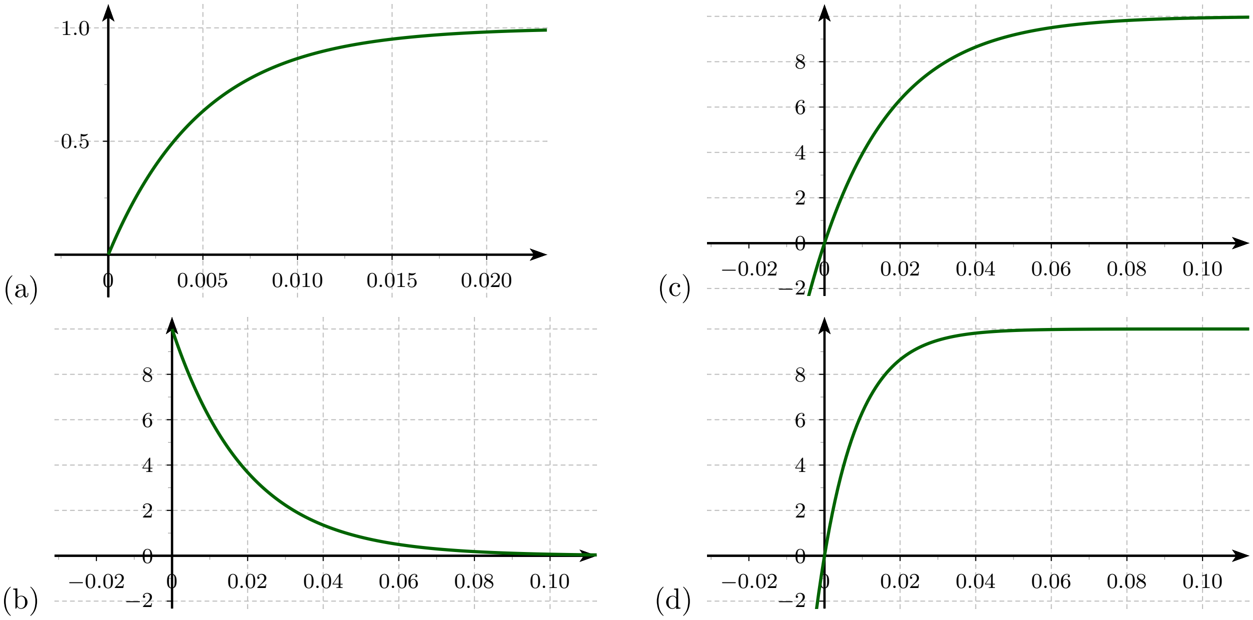
1. Déterminer une équation différentielle dont la fonction $f(x) = \cos(\pi x)$ est solution.
2. La fonction $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{9}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?
$$4y'(t) - 3y(t) = 5t$$
3. La fonction $f(x) = \ln(1 + x)e^{-x}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?
$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Exercice 10 On considère le circuit suivant :



On alimente en entrée avec une tension continue $e(t) = 10$ volts.

1. Montrer que le signal de sortie $s(t)$ vérifie l'équation différentielle (E_1) :
$$(R_1 + R_2)C\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = 10 \qquad (E_1)$$
2. Déterminer, en fonction de C, R_1 et R_2, les solutions de l'équation (E_1).
3. Déterminer l'unique solution de l'équation (E_1) qui vérifie la condition initiale $s(0) = 0$.
4. On considère : $R1 = 1K\Omega$, $R2 = 2K\Omega$ et $C = 10\mu F$. Parmi les graphiques suivants, lequel est celui de la solution trouvée à la question 3 ? (justifier !)



Exercice 11

Le but est de résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 0,05y(10 - y)$ et $y(0) = 0,01$. On admet que la fonction solution de s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que
   y vérifie $\begin{cases} y' = 0,05y(10-y) \\ y(0) = 0,01. \end{cases} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{y}$ vérifie $\begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$.
2. En déduire la solution de l'équation différentielle (E).

Chapitre 5

Fonctions périodiques

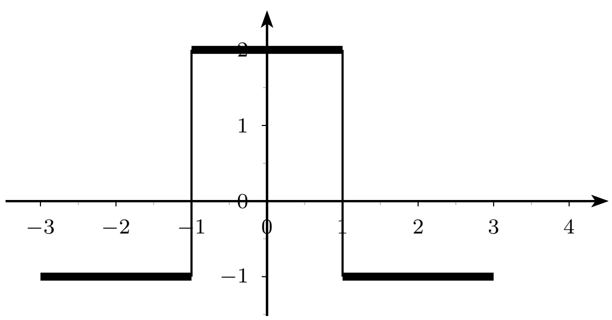
Exercice 1

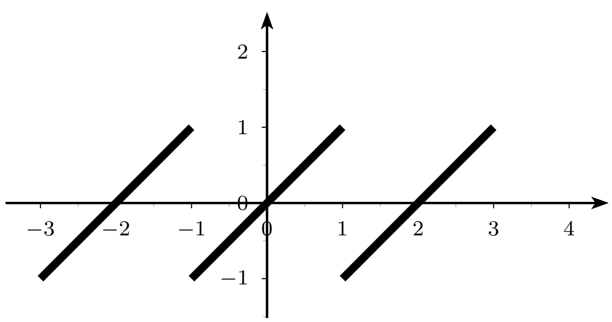
Déterminer la parité des fonctions suivantes :

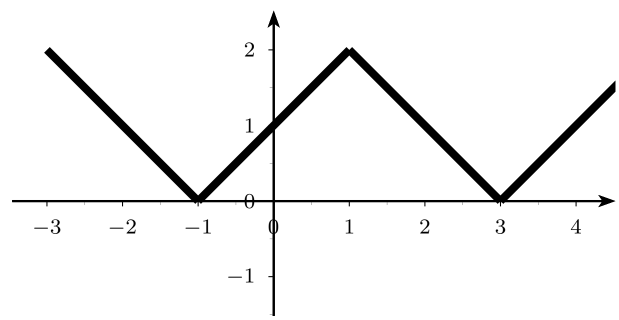
1. $f(t) = t^3 - 4t$,
2. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 3}$,
3. $f(t) = \cos(2t) + \sin(t)$,
4. $f(t) = e^{\sin(t)}$,
5. $f(t) = \ln(\cos(t))$.
6. $f(t) = e^{|\sin(t)|}$.

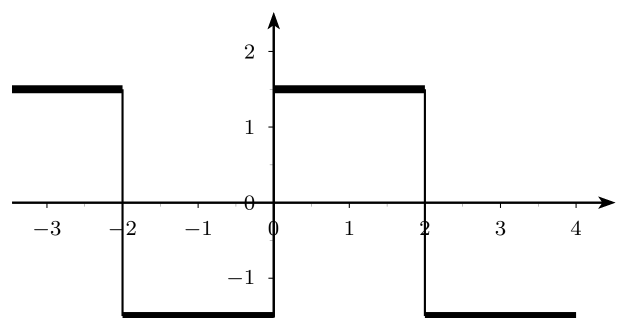
Exercice 2

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. 

2. 

3. 

4. 

Exercice 3

Déterminer les périodes des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \cos(30\pi t)$,
2. $f(t) = -7\cos(10\pi t)$,
3. $f(t) = 2\sin(8t) + 3$,
4. $f(t) = 2\sin\left(-2t + \frac{\pi}{3}\right) - 5$,
5. $f(t) = \sin(10\pi t)\cos(10\pi t)$,
6. $f(t) = \tan(t)$
7. $f(t) = \cos(2\pi t) + \sin(5\pi t)$,
8. $f(t) = \cos(18\pi t) + \sin(48\pi t)$.

Exercice 4

Tracer sur $]-4;8[$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

1. f est paire,
2. f est de période 4,
3. sur $[0,2]$ on a $f(t) = \dfrac{1}{2}t + 1$.

Exercice 5

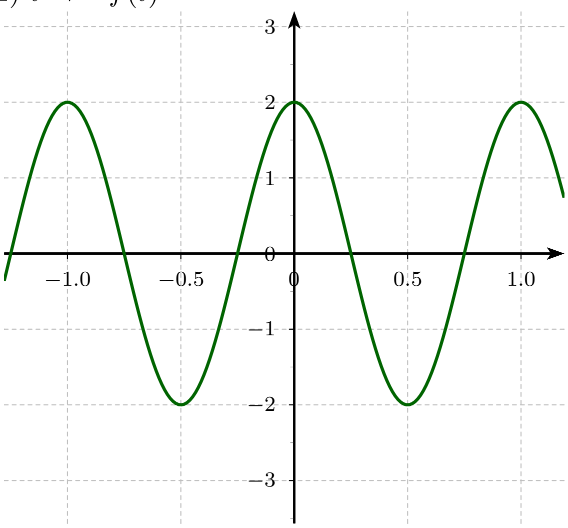
Tracer sur $]-2;4[$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

1. f est impaire,
2. f est de période 2,
3. sur $]0,1[$ on a $f(t) = t + 1$.

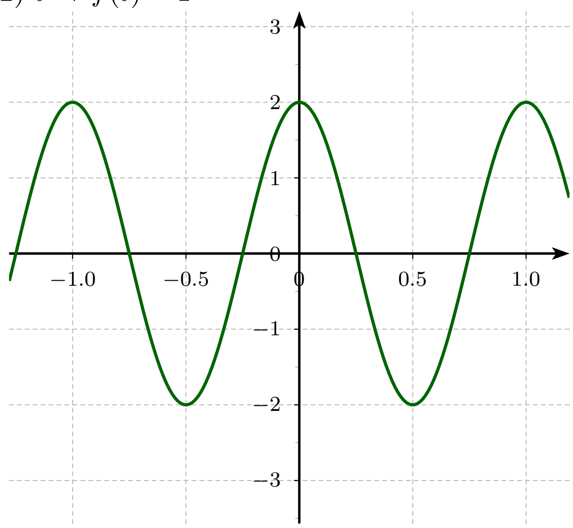
Exercice 6

On a représenté une fonction f sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors :

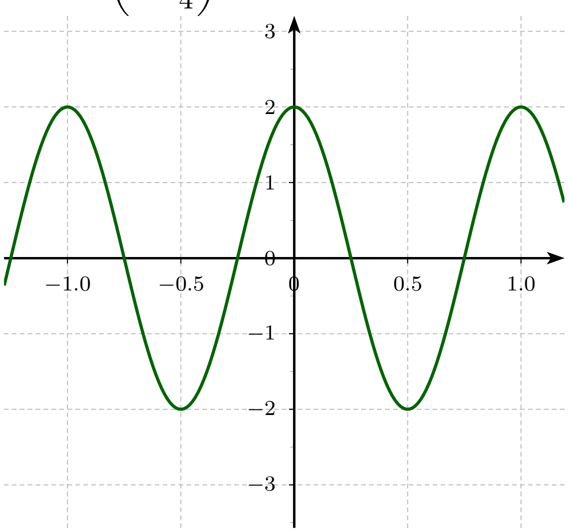
1) $t \to -f(t)$



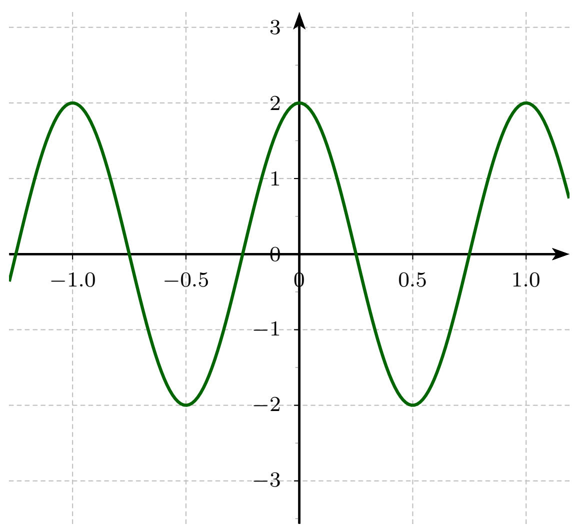
2) $t \to f(t) - 1$



3) $t \to f\left(t + \dfrac{1}{4}\right)$



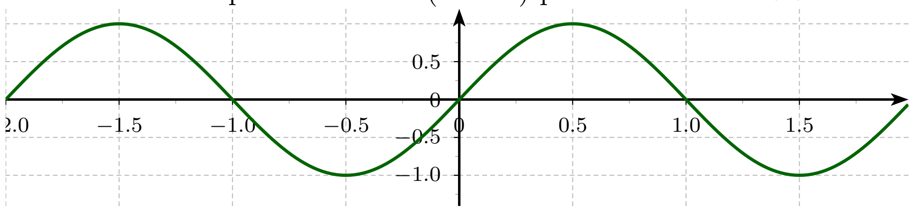
4) $t \to |f(t)|$



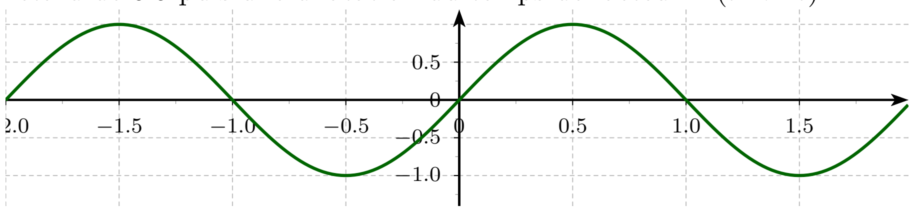
Exercice 7

On a représenté sur les deux graphiques ci-dessous la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$.

1. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction , une dilatation du temps de facteur 2 ($t \mapsto 2t$) puis un retard de 0.5.



2. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction sinus, un retard de 0.5 puis une dilatation du temps de facteur 2 ($t \mapsto 2t$).

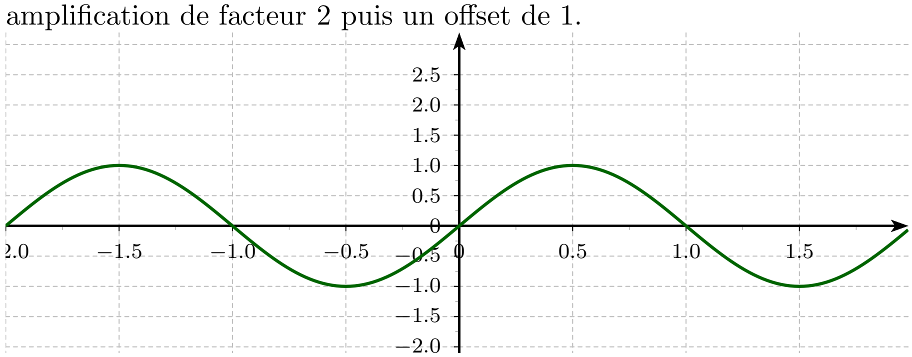


3. Dans chacun des cas, donner l'expression analytique de la fonction obtenue à l'issu de ces transformations.

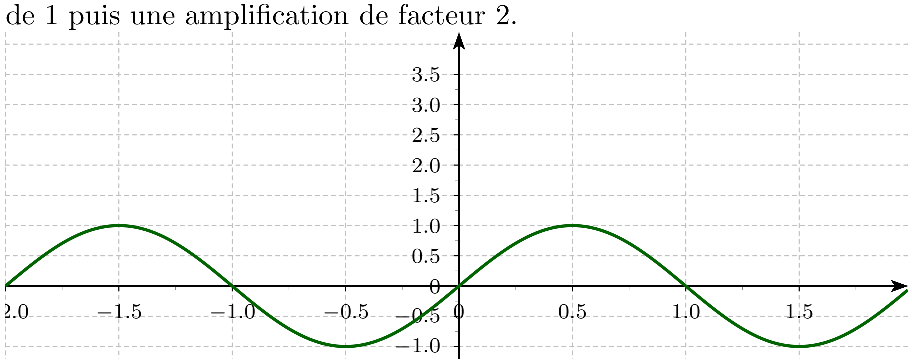
Exercice 8

On a représenté sur les deux graphiques ci-dessous la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$.

1. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction une amplification de facteur 2 puis un offset de 1.



2. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction un offset de 1 puis une amplification de facteur 2.

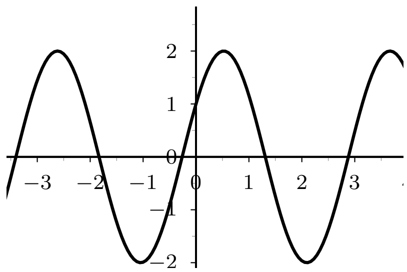


3. Dans chacun des cas, donner l'expression analytique de la fonction obtenue à l'issu de ces transformations.

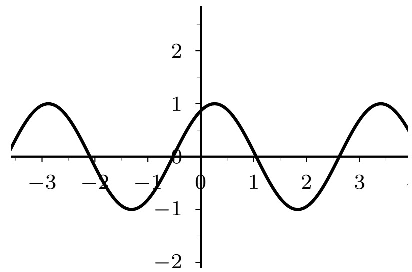
Exercice 9

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$.

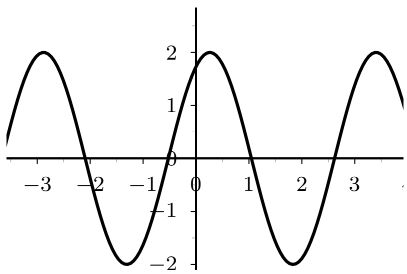
1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$
2. Déterminer la période et l'amplitude de la fonction f.
3. Parmi les courbes suivantes, dire celle qui est la représentation graphique de f, en justifiant.



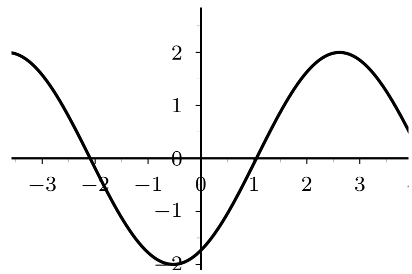
(a)



(c)



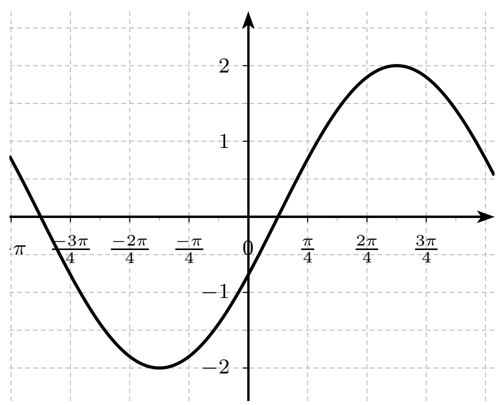
(b)



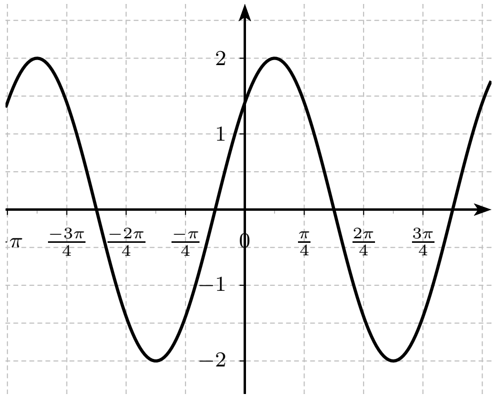
(d)

Exercice 10

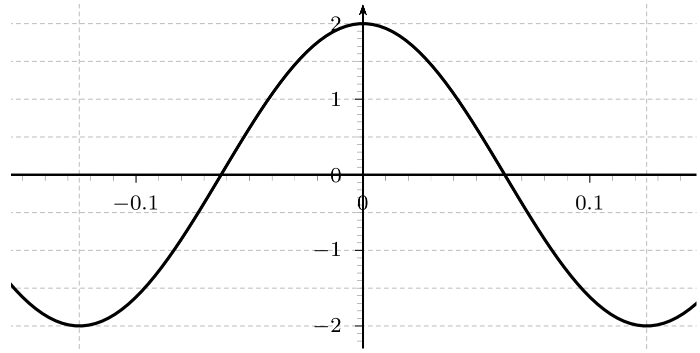
1. La fonctions ci-dessous est un sinus amplifié et déphasé : $f(t) = \alpha\sin(t + \varphi)$.
   Déterminer la valeur de φ.



2. Les fonctions ci-dessous sont des sinus amplifiés, déphasés et de fréquence modifiée de la forme : $f(t) = \alpha \sin(\omega t + \varphi)$. Déterminer ω et φ.



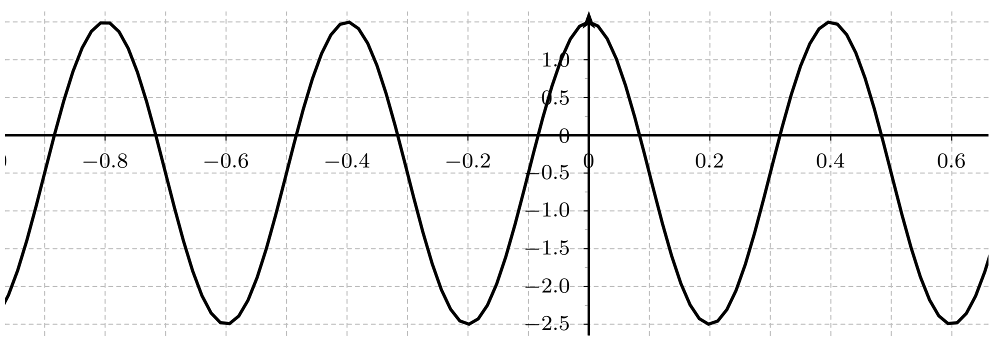
(a)



(b)

Exercice 11

On considère la fonction f suivante :

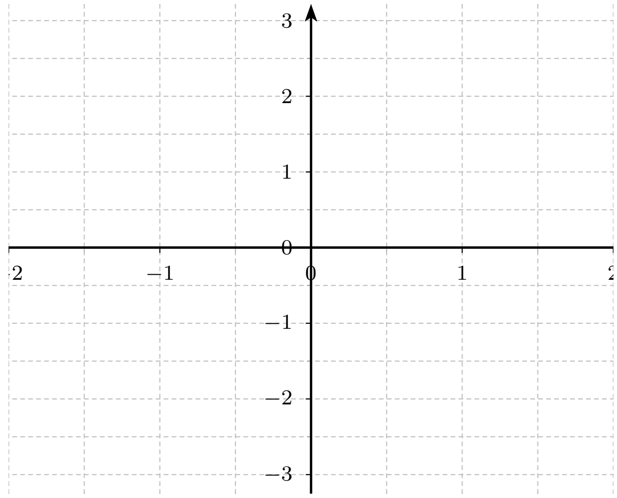


En supposant que le signal d'origine est un sinus : $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + C$, déterminer par lecture graphique :

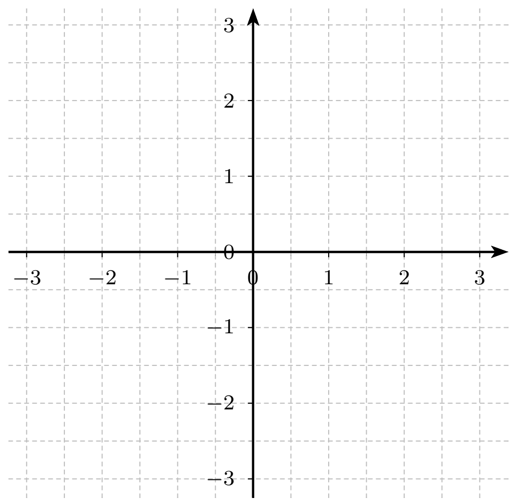
1. l'amplitude de f,
2. la période et la pulsation de f,
3. l'offset C de f,
4. le déphasage φ de f par rapport au sinus,
5. l'expression de $f(t)$.

Exercice 12 Tracer, en justifiant votre démarche, les courbes représentatives des fonctions :

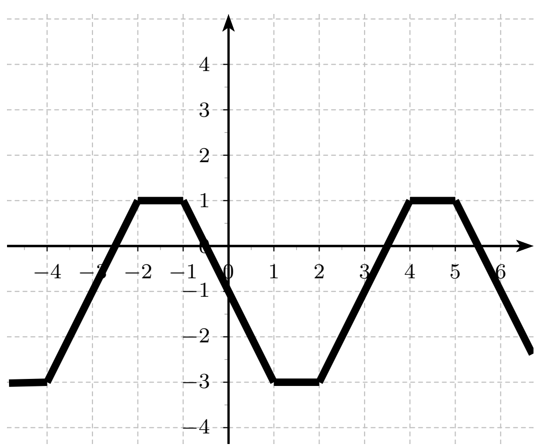
1. $f_1(t) = 1,5\sin(\pi(t+1))$,



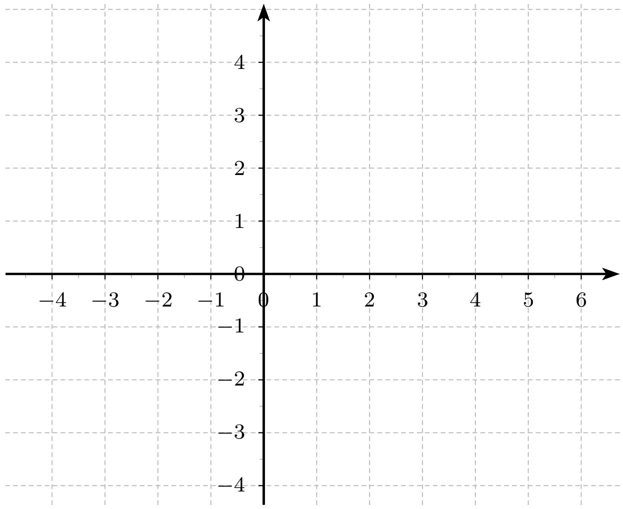
2. $f_2(t) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.



Exercice 13 Voici le graphe d'une fonction périodique f :

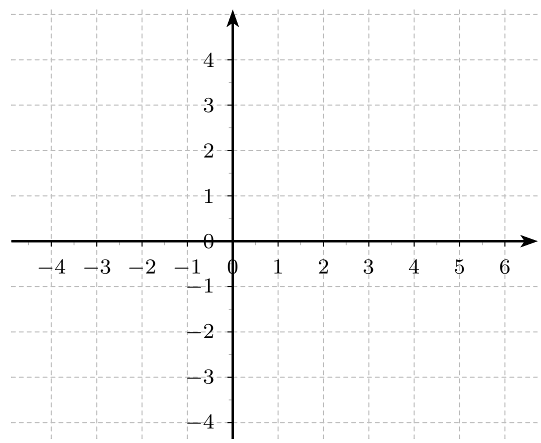


1. Déterminer la parité et la période de f.
2. Représenter sur le graphique ci-dessous (en justifiant votre démarche) la courbe représentative de $h(x) = -|f(2x)|$



3. Déterminer la période de la fonction $g(x) = f(32x + 1) + f(48x)$

4. (a) Déterminer a et b pour que la fonction $p(x) = f(x + a) + b$ soit paire.

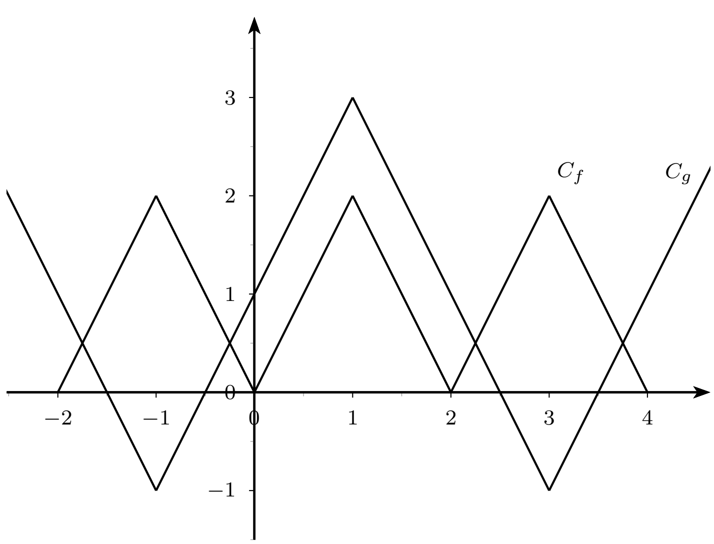


   (b) Représenter p sur le graphique ci-contre.

5. Déterminer c et d pour que la fonction $m(x) = f(x + c) + d$ soit impaire.

Exercice 14

Soient les fonctions périodiques f et g dont les courbes représentatives sont :



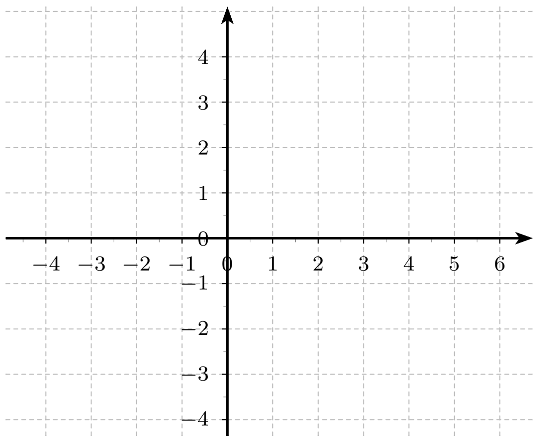
Déterminer les constantes a, b, c et d telles que $g(t) = af(bt + c) + d$.

Exercice 15

1. On définit la fonction créneau unité par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

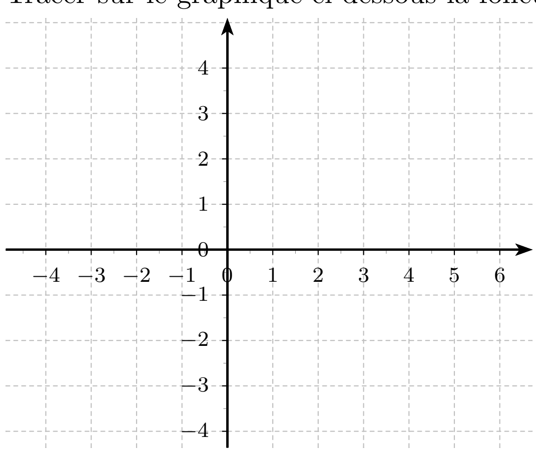
Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Pi(t-3)$



2. On définit la fonction triangle par :

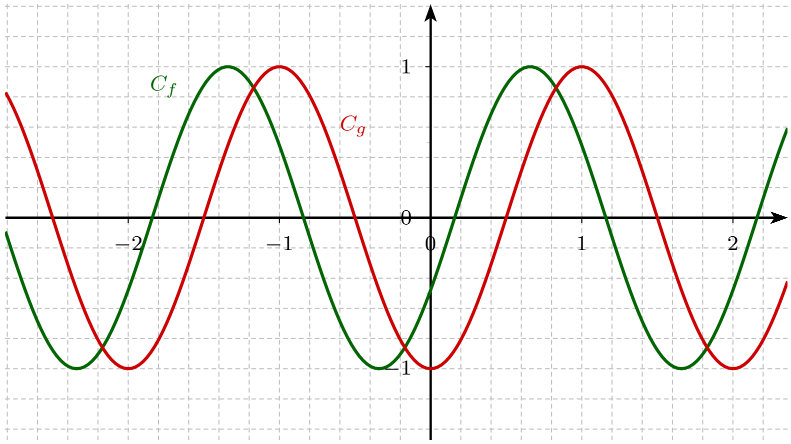
$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in]-1, 0] \\ -t+1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction $g(t) = \Lambda(2t-1) - 3$



Exercice 16 Les questions suivantes sont indépendantes.

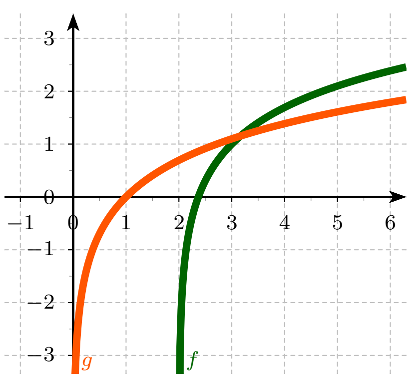
1. Sur le graphique ci-dessous, quelle courbe représente la fonction $t \mapsto \sin\left(\pi t - \frac{1}{2}\right)$?



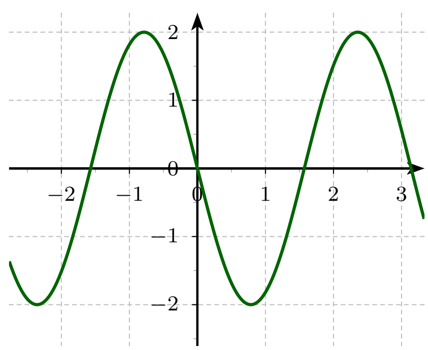
2. Déterminer la période des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = -2\cos(t) + 1$
   (b) $f_2(t) = |\sin(t)|$
3. La fonction f est une fonction T périodique. Déterminer, en fonction de T, la période de la fonction g définie par
$$g(t) = 5f\left(\frac{1}{4}t\right) - f\left(\frac{1}{6}t + 1\right)$$
4. Déterminer la période, l'amplitude et le déphasage par rapport au sinus de la fonction
$$f_3(t) = \sqrt{3}\cos(4t) - \sin(4t)$$

Exercice 17

1. Déterminer les constantes a et b (justifier soigneusement votre démarche) pour que
$$g(x) = f(x + a) + b$$



2. Déterminer les constantes A, B et C (justifier soigneusement votre démarche) pour que
$$h(x) = A\sin(Bx + C)$$



Exercice 18 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes

1. Donner (en justifiant !) la période des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(x) = -3\cos(12x + \pi) + 5$

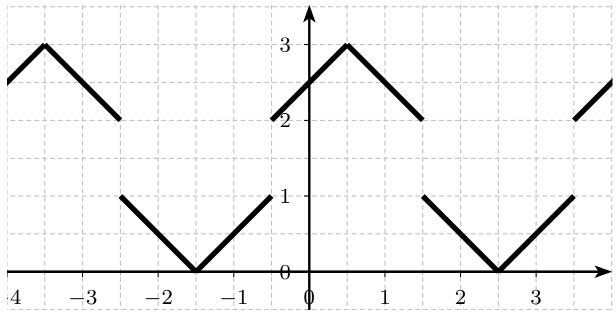
(b) $f_2(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

2. Montrer que la fonction $f_3(t) = (\cos(2t))^2$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.
3. Donner (en justifiant) la parité des fonctions suivantes :

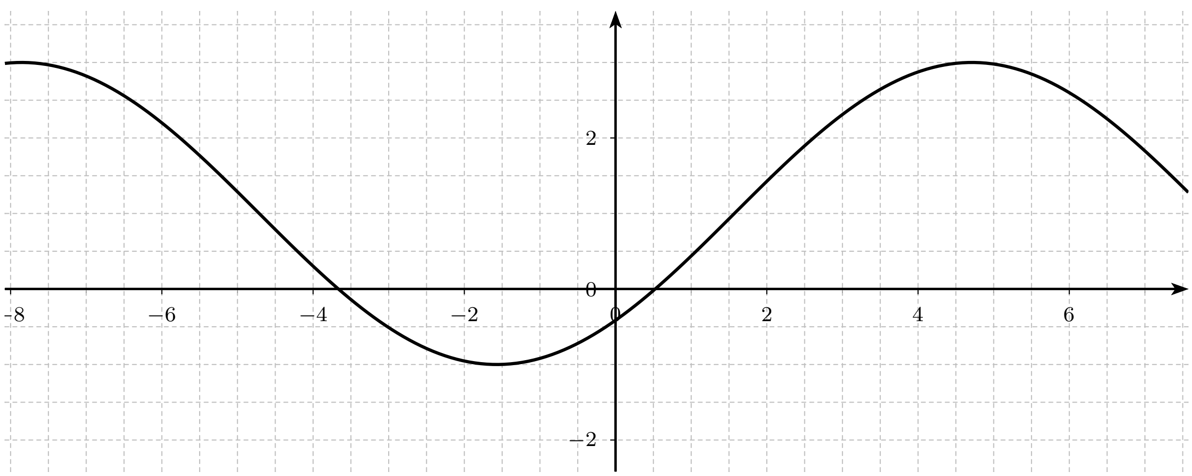
(a) $f_4(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$

(b) $f_5(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

(c) f_6 est la fonction dont le graphe est



Exercice 19 Sur le graphique ci-dessous nous avons tracer la courbe de la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$.



1. Donner les noms utilisés en génie électrique pour les 4 constantes : A, ω, φ et C.
2. Déterminer, en justifiant la démarche, les valeurs de A, ω, φ et C.
3. Vérifier votre résultat en calculant $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ avec la fonction que vous avez obtenue à la Q2.

Chapitre 6

Nombres Complexes

Exercice 1 Simplifier les expressions :

1. $A = \left(e^4 \times e^{-2}\right)^2$
2. $B = e^8 \times \dfrac{\left(e^{-3}\right)^3}{e^4 \times \dfrac{1}{e^{-3}}}$
3. $C = \sqrt{e^{3x} \times e^{9x}}$
4. $D = (e^{5x} - e^{-2x})(e^{5x} + e^{-2x})$

Exercice 2 Soient les nombres complexes : $z_1 = 1-2i$ et $z_2 = 3+4i$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$z_3 = z_1 + z_2$ $\quad$ $z_4 = z_1 * z_2$ $\quad$ $z_5 = z_1^2$ $\quad$ $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 3

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$z_1 = \sqrt{3} + i$

$z_2 = \dfrac{z_1^2}{2}$

$z_3 = \dfrac{4}{z_2}$

$z_4 = \dfrac{z_1}{z_3}$

$z_5 = z_1 \times \overline{z_1}$

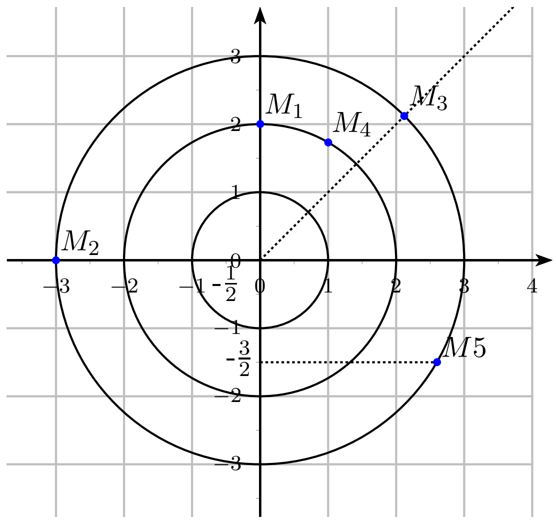
Exercice 4

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

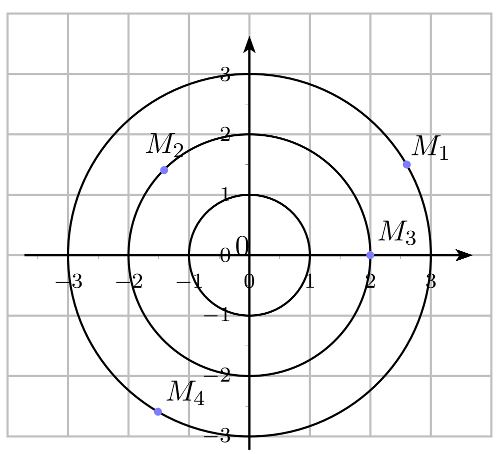
1. $z_1 = \dfrac{1}{i}$
2. $z_2 = \dfrac{3-2i}{i}$
3. $z_3 = (2-3i)^3$
4. $z_4 = \dfrac{3-4i}{i-1}$
5. $z_5 = i^5 - (2i)^4 + 3(-i)^3 - 5i^2 + 1$
6. $z_6 = (2+i)(1-3i)(i-5)$

Exercice 5

Donner les affixes des points M_i du dessin ci-dessous (sous forme algébrique et exponentielle) :



Exercice 6



1. Donner les affixes des points M_i.

2. Placer le plus précisément possible les points d'affixes : $z_5 = \sqrt{2}e^{7i\pi}$ et $z_6 = -e^{23i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 7

1. Pour chacun des nombres complexes suivants, calculer la tangente de l'argument puis en déduire la valeur de l'argument :

   (a) $Z_1 = 1 + i$ (b) $Z_2 = -1 + i$ (c) $Z_3 = -1 - i$

2. Donner une formule, utilisant arctan, pour l'argument de $z = a + ib$ selon si $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$.
3. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants (en utilisant arctan) :

(a) $z_1 = 1 + jRC\omega$

(b) $z_2 = \dfrac{\dfrac{\omega}{\omega_0} j}{-1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$

(c) $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{R + \dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{1}{jRC\omega}}$

Indication : Les constantes de la question sont toutes positives.

Exercice 8

Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7e^{i\pi}$
2. $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$
3. $z_3 = \dfrac{5}{2} e^{-7i\frac{\pi}{6}}$
4. $z_4 = -\dfrac{1}{2}$
5. $z_5 = \dfrac{1}{i}$
6. $z_6 = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$
7. $z_7 = -4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
8. $z_8 = e^{i+1}$
9. $z_9 = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} i^k$
10. $z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 7e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 9

Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i)$
2. $z_2 = \dfrac{3i}{5}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2-2i)$
3. $z_3 = (1+i)^2 + (1-i)^2$
4. $z_4 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2(1-i)}$
5. $z_5 = (1+i)^9$
6. $z_6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$
7. $z_7 = (1 + i\sqrt{3})^{2021}$

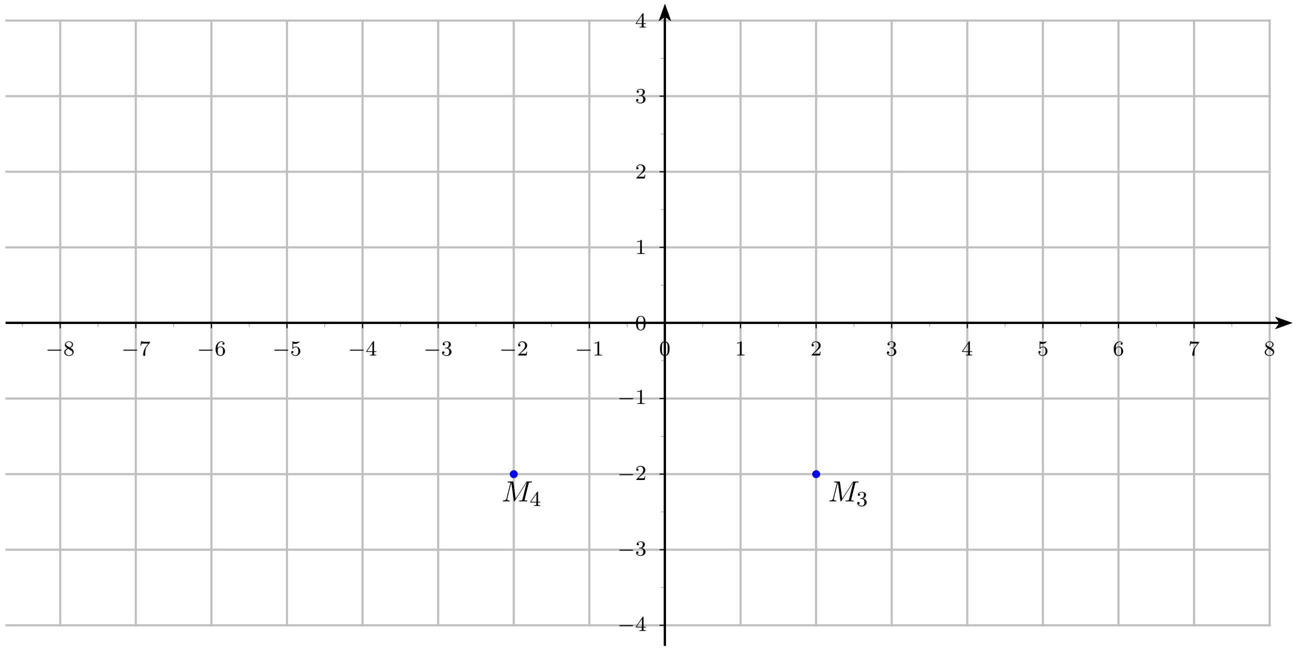
Exercice 10

1. Déterminer le module et l'argument de $Z = 17e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. Déterminer l'argument de $Z = \dfrac{-R}{-1+i}$ avec $R \in]0; +\infty[$
3. Déterminer l'argument de $Z = \dfrac{1}{R} \times \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega}$ avec R, C et ω des réels positifs.
4. Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

   (a) $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$

   (b) $Z_2 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5. Sur le graphique ci-dessous, les points M_3 et M_4 sont les points d'affixes Z_3 et Z_4. Placer précisément (en justifiant la démarche) les points d'affixe : $\overline{Z_4}$, $i \times Z_3$, $Z_3 + Z_4$, $Z_3 * Z_4$ et $-\dfrac{1}{2} \times Z_3$.



Exercice 11

Soit $\theta \in [0, \pi[$.

1. Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. En déduire la partie réelle et imaginaire, le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$.

Exercice 12

Soient $Z_1 = r_1 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_2 = r_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ deux nombres complexes dont on ne connaît pas les modules. Déterminer si possible les valeurs des arguments des nombres :

1. $-3Z_1$
2. $\overline{Z_2}$
3. iZ_1
4. $Z_1 + Z_2$
5. $Z_1 Z_2$
6. $\dfrac{Z_2}{Z_1}$
7. Z_1^7

Exercice 13

Soient $Z_1 = 5e^{i\theta_1}$ et $Z_2 = 7e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes dont on ne connaît pas les arguments. Déterminer si possible les valeurs des modules des nombres :

1. $-3Z_1$
2. $\overline{Z_2}$
3. iZ_1
4. $Z_1 + Z_2$
5. $Z_1 Z_2$
6. $\dfrac{Z_2}{Z_1}$
7. Z_1^7

Exercice 14

Linéariser chacune des expressions suivantes :

1. $\cos(2x)\sin(3x)$
2. $\cos(4t)\cos(7t)$
3. $\cos^3(2x)$
4. $\cos(x)\sin^2(x)$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + 3z - 4 = 0$
2. $2z^2 + 5z + 2 = 0$
3. $z^2 - 7z = 0$
4. $z^2 + 4z + 4 = 0$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 + 8 = 0$
3. $z^2 + 4z + 7 = 0$

Exercice 17

1. On considère l'équation
$$z^2 + z + 3iz + 2i - 2 = 0$$
Le nombre complexe $z = 1 + 2i$ est il solution ?
2. Vérifier que i est solution de l'équation suivante :
$$2iZ^2 + (1 - i)Z + (i - 1) = 0$$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$
2. $z^2 + 2z + 1 - i = 0$
3. $z^2 - (3 + 2i)z + (1 + 3i) = 0$
4. $z^2 - 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0.$

Compléments

Exercice 19

1. Trois dipoles d'impédances complexes respectives $\underline{Z_1} = 75 - 50j$, $\underline{Z_2} = 50 + 50j$ et $\underline{Z_3} = 100 - 25j$.
   (a) Quelle est l'impédance du dipôle équivalent si on monte les dipôles en série ?
   (b) Quelle est l'impédance du dipôle équivalent si on monte les dipôles en parallèles ?
2. L'impédance complexe d'un circuit est telle que
$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}}$$
Sachant que $\underline{Z_1} = 1 + 2j$, $\underline{Z_2} = -1 + 3j$, $\underline{Z_3} = 4 + 5j$, calculer l'impédance du circuit.

Exercice 20

1. On considère un dipôle formée d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine L montés en série. Le signal d'entrée est de pulsation ω.
   (a) Déterminer l'impédance complexe équivalente.
   (b) Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 20\Omega$, $L = 2.5H$, $C = 210\mu F$ et $\omega = 10\pi$.
2. On considère un dipôle formée d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine L montés en parallèle. Le signal d'entrée est de pulsation ω.
   (a) Déterminer l'impédance complexe équivalente.
   (b) Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 20\Omega$, $L = 2.5H$, $C = 210\mu F$ et $\omega = 10\pi$.

Exercice 21

1. Donner un exemple de nombre complexe Z qui vérifie simultanément les 4 propriétés suivantes :

$$|Z| < 2, \qquad Re(Z) > 1, \qquad Im(Z) < 1, \qquad arg(Z) \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$$

2. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :
   (a) Il n'existe pas de nombre complexe z tel que : $\overline{z} = z$
   (b) Pour tout complexe z on a $arg(iz) = arg(z) + \pi$

Exercice 22

1. Déterminer la partie réelle et imaginaire, le module et l'argument de $1 + i\tan\left(\frac{\pi}{18}\right)$.
2. Généraliser la question précédente et donner le module et l'argument de $1 + i\tan(\varphi)$pour $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \dfrac{1 + i\tan\varphi}{1 - i\tan\varphi}$.

Exercice 23

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

1. $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$
2. $Z_2 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$
3. $Z_3 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
4. $Z_4 = \left(5 + 5\sqrt{3}i\right)^3$

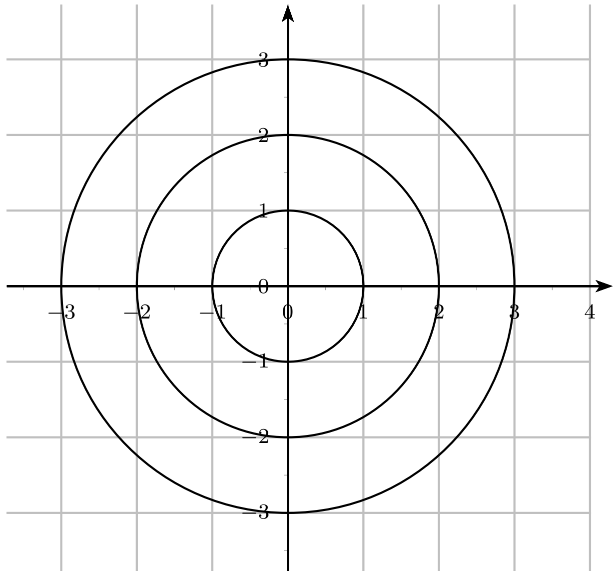
Exercice 24 ***Extrait de DS 2019***

1. Déterminer le module de :
   (a) $Z_1 = \dfrac{1-7i}{3+i}$
   (b) $Z_2 = (2-i)^3$
2. Déterminer l'argument de :
   (a) $Z_4 = -2i(i - \sqrt{3})$
   (b) $Z_5 = \dfrac{-3e^{i\frac{\pi}{6}}}{5e^{i\frac{\pi}{4}}}$
   (c) $Z_6 = \dfrac{-R}{-1+i}$ avec $R \in]0; +\infty[$
3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$Z_7 = \left(e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-2i\pi}\right)$$

4. Placer précisément les points d'affixe Z_8, Z_9 et Z_{10}

(a) $Z_9 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$ (b) $Z_8 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$ (c) $Z_{10} = \dfrac{1}{i}$



5. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler :

$$f(t) = \sin(3t)\sin(5t)$$

Exercice 25 ***Extrait de DS 2019***

1. Vérifier que i est solution de l'équation suivante :

$$2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$$

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $Z^2 + 2Z + 37 = 0$
   (b) $2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$

Chapitre 7

Rappels : Étude de fonctions

Exercice 1 ***Limite en*** ∞

Calculer les limites des fonctions suivantes en $-\infty$ ou $+\infty$

1. $f(t) = t^2 + 3t - 1$ en $+\infty$
2. $f(t) = t^3 - 3t^2 - 2t - 5$ en $+\infty$
3. $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{t + 1}$ en $-\infty$
4. $f(t) = \dfrac{t^2 + 4t - 6}{3t^2 + 10t}$ en $-\infty$
5. $f(t) = \dfrac{1}{3t^2} + \dfrac{2}{t} - 4$ en $-\infty$
6. $f(t) = \ln(2t^2 - 3)$ en $+\infty$
7. $f(t) = \ln\left(\frac{2}{t+3}\right)$ en $+\infty$
8. $f(t) = e^{\frac{1}{t} - 3}$ en $+\infty$
9. $f(t) = e^{3t^2 + t - 1}$ en $+\infty$
10. $f(t) = \dfrac{e^{3t-1}}{e^{2t+2}}$ en $+\infty$

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 5x - 3}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^3+1}{x-2}}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(3x^2 + 1\right) - 2\ln(x + 1)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 3x + 2}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x(x + 1)} - \frac{1}{x}$

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1)\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x)\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{10}}{e^{-2x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-2\ln(-x^3)}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^3)e^{-x}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 + e^{3x}$

Exercice 4

1. dans $\mathbb{R}$:

   (a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ (b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} = -1$ (c) $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$

2. On souhaite résoudre l'équation suivante

$$(x^2-2)(x-1)(x+3) = (2x-1)(x^2+4x)$$

   (a) Existe t-il un facteur commun qui permettrait de factriser aisément ?

   (b) Développer chaque expression de l'équation.

   (c) Résoudre.

Exercice 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (-3x+2)^4$
2. $f(s) = e^{-s^2+1}$
3. $f(x) = \sqrt{2x+5}$
4. $f(x) = e^{\sqrt{4x-3}}$
5. $f(t) = e^{\cos(3t)}$
6. $f(t) = \tan(2t)$

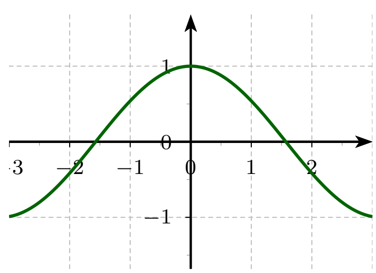
Exercice 6

Calculez la dérivée seconde des fonctions suivantes :

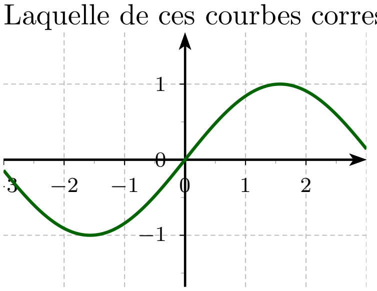
1. $f(x) = xe^{-2x}$
2. $f(x) = \ln(x^2+1)$

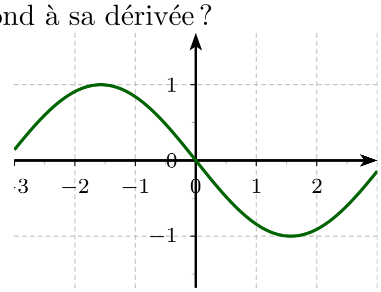
Exercice 7

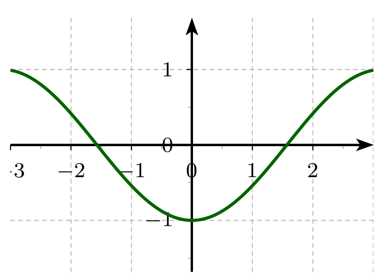
Voici le graphe d'une fonction continue et dérivable :



Laquelle de ces courbes correspond à sa dérivée ?

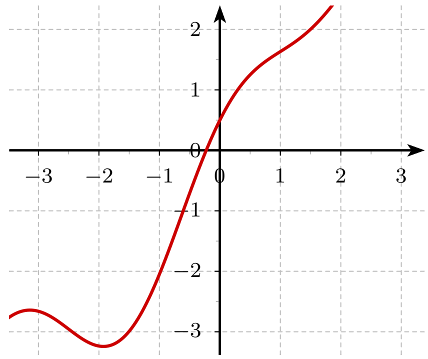




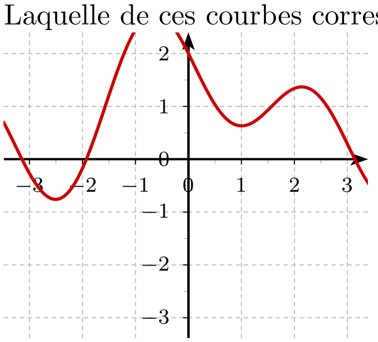


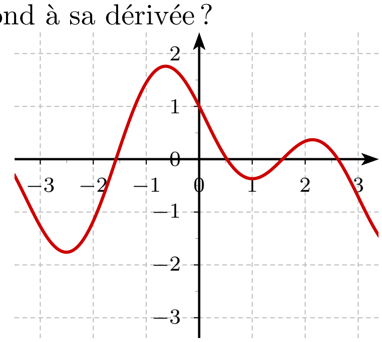
Exercice 8

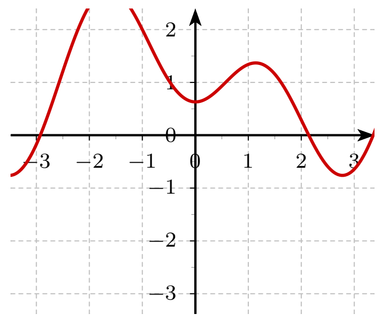
Voici le graphe d'une fonction continue et dérivable :



Laquelle de ces courbes correspond à sa dérivée ?







Exercice 9

Soit la fonction définie par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x+2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis le sens de variation de f.
3. Déterminer les limites de f en -2, $-\infty$ et $+\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe et ses asymptotes.

Exercice 10

Soit la fonction définie par $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis la dérivée seconde.
3. Déterminer la sens de variation de la fonction dérivée de f.
4. En déduire le signe de f' et le sens de variation de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
6. Tracer l'allure de la courbe et sa tangente en 1.

Exercice 11

On considère la fonction $f(t) = \begin{cases} 3\left(1 - e^{-t/2}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}_*^+$ puis le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'équation de la tangente « à droite » à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure de la courbe et sa tangente en 0.

Exercice 12

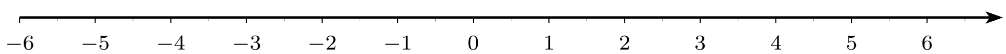
Soit la fonction définie par $f(x) = \ln((x-2)(3-4x))$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis le sens de variation de f.
3. Déterminer la limite de f en 2.
4. Tracer l'allure de la courbe.

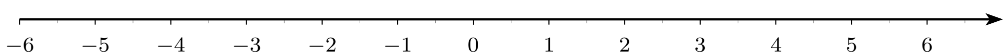
Exercice 13

1. Écrire les conditions suivantes avec un intervalle et représenter cet intervalle sur l'axe gradué :

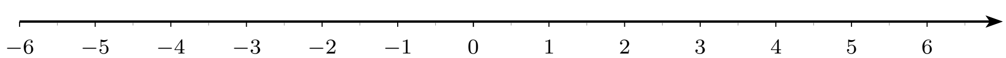
   (a) $|x| < 3$



   (b) $|x-1| < 3$



   (c) $|2x+1| \geq 3$



2. Déterminer les valeurs de x décrites par les inéquations et les représenter sur un axe :

   (a) $|x| < -5$

   (b) $|x| \geq \sqrt{2}$

   (c) $|x+2| > \dfrac{1}{2}$

   (d) $|2x-3| \leq \dfrac{1}{2}$

3. Ecrire avec une valeur absolue chacune des conditions suivantes :

   (a) $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{2}{3}$

   (b) $0 \leq x \leq 5$

   (c) $1 < x < 3,5$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x| = 3, \qquad |x-2| = -2, \qquad |x-2| = 5$$
$$|3-2x| = 2, \qquad |x-2| = |3-x|, \qquad |3x+1| - |x-2| = 9.$$
$$|t^2 + t - 2| = 3$$

Exercice 15

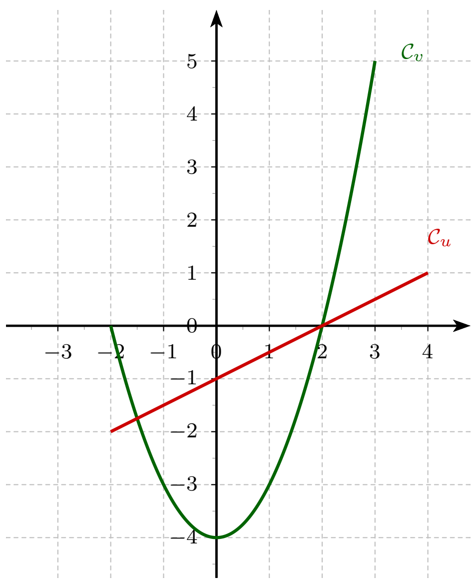
Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(t) = |2t - 3|$
2. $g(x) = |x - 3| + |2x + 1|$
3. $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 2 \\ 2 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$
4. $k(t) = |t^2 + t - 2|$

Exercice 16 On considère la fonciton $f(t) = t^2 - 2$

1. Déterminer l'image de 3.
2. Déterminer le ou les antécédents de 42.
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[2; 5[$.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-3; 0[$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-1; 4]$.
6. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-\infty; 4]$.

Exercice 17 On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_v$ d'équation $y = v(x)$ et $\mathcal{C}_u$ d'équation $y = u(x)$



On considère que u n'est définie que sur $[-2, 4]$ et v sur $[-2, 3]$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs images prises par $u(x)$?
2. Justifier que la fonction $f = v \circ u$ est bien définie.
3. Construire les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses -2, -1, 0, 1, 2 et 4.
4. Déterminer les expressions de u et v puis de f et retrouver les résultats précédents.

Exercice 18

On considère les fonctions $f_1(x) = x^2 - 3$, $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, $g_1(x) = x - 4$, $h_1(x) = x^2 + x + 1$ et $h_2(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.

1. Donner l'expression des fonctions composées suivantes :
   (a) $g_1 \circ f_1$
   (b) $f_1 \circ g_1$
   (c) $g_1 \circ h_1$
   (d) $h_2 \circ f_1$
   (e) $h_1 \circ h_1$
   (f) $f_1 \circ g_1 \circ f_2$
2. Dans chaque cas, donner deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec u et v différent de l'identité.
   (a) $f(x) = (x-3)^2$,
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,
   (c) $f(x) = \sqrt{3x-1}$,
   (d) $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Dans chaque cas, écrire g comme la composée de trois fonctions différentes de l'identité :

(a) $g(x) = \sqrt{x^2+3}$ (b) $g(x) = x^2 + 2x + 3$ (c) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

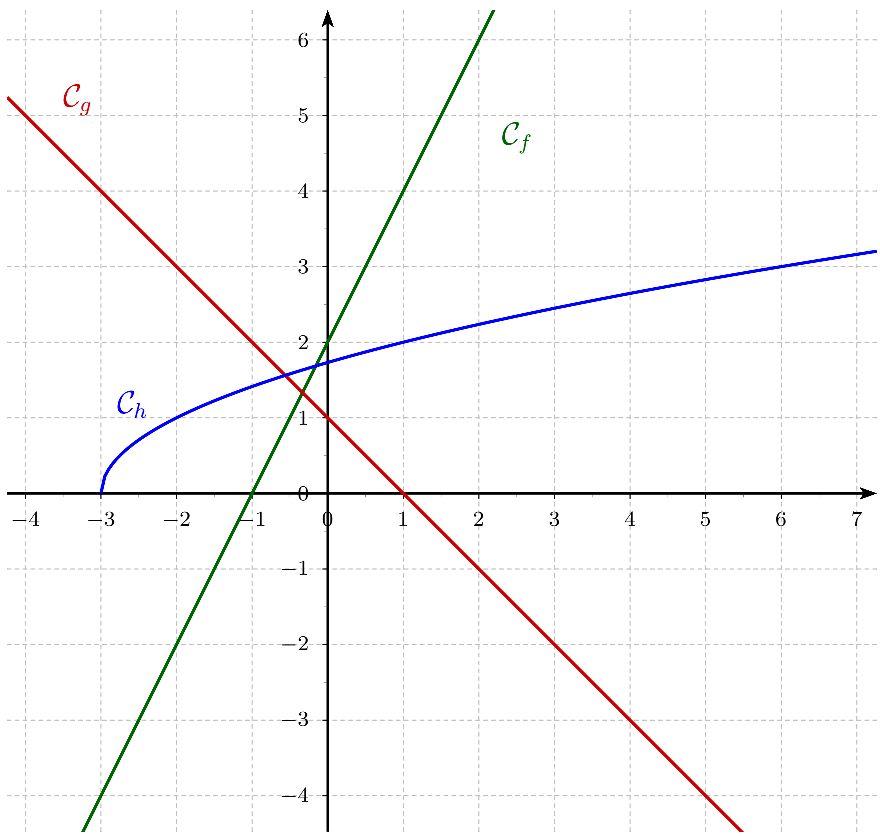
Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$ et g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x) = 3 - (x-2)^2$.

1. Montrer que pour tout $x \in [2,+\infty[$, $f \circ g(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty,3]$, $g \circ f(x) = x$.
3. Peut-on dire que dans cet exemple $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 20 ***Extrait de DS 2019***

On considère les représentations graphiques des fonctions f, g et h suivantes :



Déterminer, si possible, les valeurs de

1. $f \circ g(1)$
2. $g \circ f(1)$
3. $h \circ f(-3)$
4. $h \circ f \circ g(-1)$
5. $f \circ f(-2)$

Compléments

Exercice 21 Déterminer les limites suivantes :

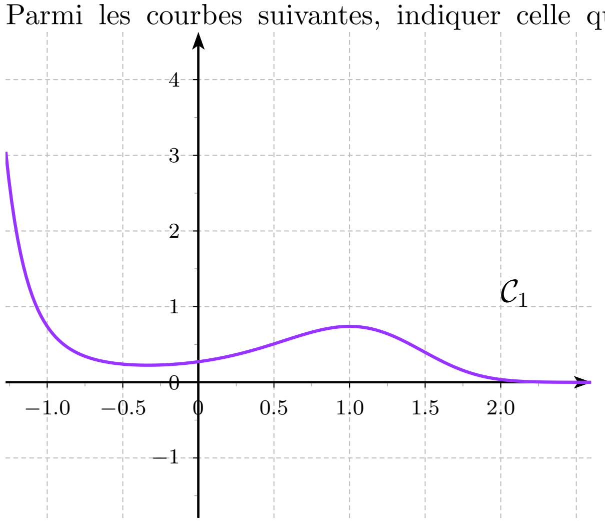
1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^{10}+1)e^{-5x}$
5. $\lim\limits_{t\to 3} \dfrac{t^2-2t-3}{2t^2-18}$
6. $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t^2-2t-3}{2t^2-18}$
7. $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t^2-2t-3}{e^{t-5}}$
8. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{e^{2t+3}-e^5}{t-1}$

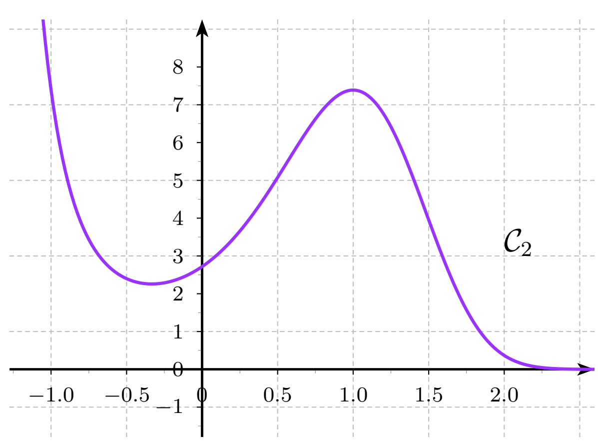
Exercice 22

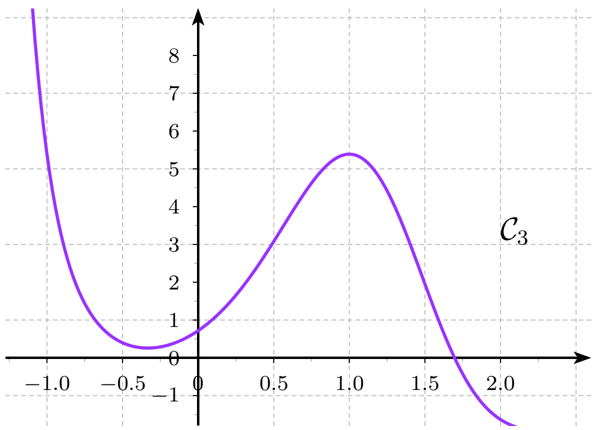
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

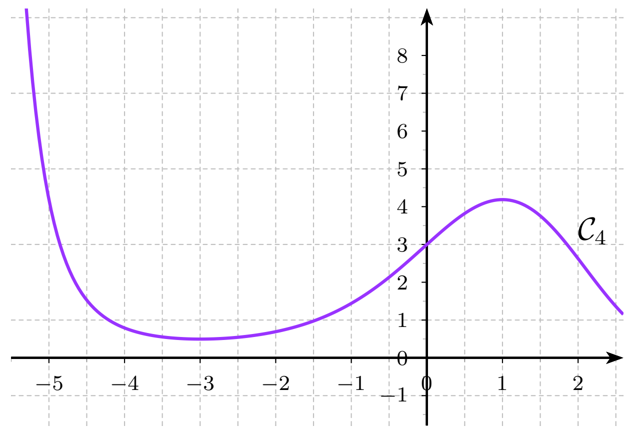
$$f(x) = e^{-x^3+x^2+x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la dérivée de f puis en déduire le sens de variation de f.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (On indiquera les valeurs des limites trouvées à la question 3 ainsi que les valeurs de f aux changements de sens de variations)
5. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui correspond à la représentation graphique de f :









Exercice 23

Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|t^3| = -1$
2. $|3 - 2t| = 8$
3. $|t^2 - 1| = 4$
4. $|t + 5| < 3$
5. $|t - 117| > 19$

Exercice 24 Soient les fonctions f, g et h suivantes

$$f(x) = e^{x+1} \quad g(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x} \quad h(x) = \frac{1}{3x - 1}$$

1. Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $h \circ f$.
2. Montrer que, pour tout $x \neq \frac{1}{3}$ on a : $g \circ h(x) = x$.
3. Déterminer deux fonctions u et v (qui ne soient pas la fonction identité) telles que $g(x) = v \circ u(x)$.
4. Déterminer une fonction w telle que, pour tout $x > 0$, $f \circ w(x) = x$.

Exercice 25 ***Extrait de DS 2019***

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition et la dérivée :

1. $f(t) = \dfrac{t^3 - 1}{4}$
2. $g(t) = \ln(3t - 1)$
3. $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 1}$
4. $k(t) = \cos(t^2)$

Exercice 26

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f =]-1, 1[$.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Déterminer les limites de f en -1 et en 1.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Chapitre 8

DS de l'année 2022-2023

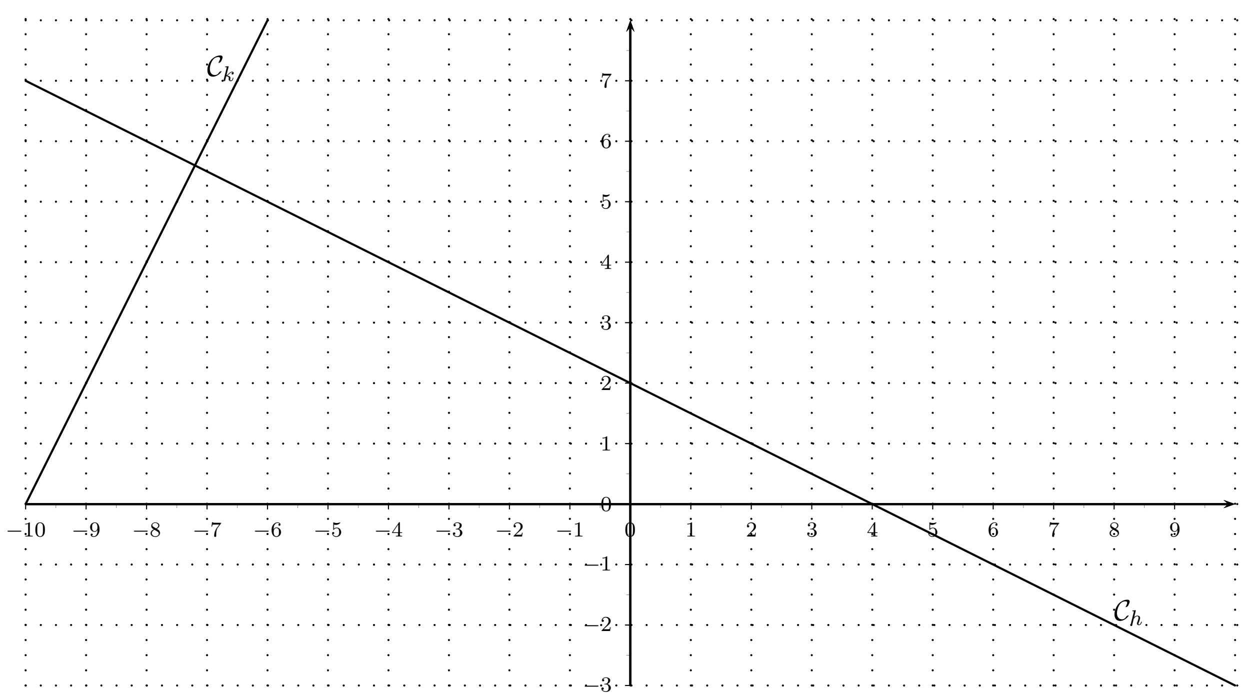
Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 30 septembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 1 : rappels de calcul***

1. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les droites représentatives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = -\frac{x}{5} + 1$ **en expliquant votre démarche**
   (b) $g(x) = 3x - 2$ **sans justifier**
2. Donner les équations de chacune des droites suivantes ($\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$) **en expliquant votre démarche**.



Exercice 2 ***Chapitre 1 : rappels de calcul*** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 2t^5 + 3t^4 - 4t^3 - 5t^2 + 6t + 7$
2. $f_2(t) = \cos(t)\sin(t)$
3. $f_4(t) = \frac{1}{(3t+2)^4}$
4. $f_5(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$
5. $f_7(t) = \ln(2t+5)$
6. $f_8(t) = e^{\frac{t}{2}}$

Exercice 3 ***Chapitre 1 : rappels de calcul*** Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Ecrire $A = \frac{2022}{9}$ sous la forme $E + \frac{P}{Q}$ oú E est un nombre entier et $\frac{P}{Q}$ est une fraction irréductible avec $P < Q$.
2. Simplifier les écritures :

   (a) $B = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

   (b) $C = \frac{16^4+8^3}{4^5}$
3. On considère l'expression $\frac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \gamma$. Déterminer b en fonction de a, α, β et γ.

Exercice 4 ***Chapitre 2 : Logique et Notation Mathématiques*** Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Compléter **(sans justifier)** les pointillés par le connecteur logique qui convient : $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^3 = 8 \ \cdots\cdots \ x = 2$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 = 16 \ \cdots\cdots \ x = 2$

   (c) Soit N un entier. "N n'est pas un multiple de 3" $\cdots\cdots$ "N^2 n'est pas un multiple de 3"
2. Répondre par **Vrai ou Faux en justifiant** (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = -1$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\frac{4x^2-1}{2x-1} = 2x+1$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 2x + 1 = 0$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 18 novembre 2022 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

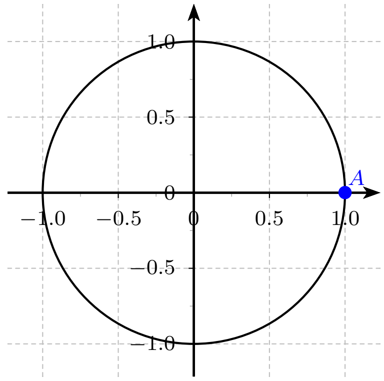
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. Donner la mesure principale de chacun des angles

$$\theta_1 = \frac{31\pi}{4} \qquad \theta_2 = \frac{1789\pi}{6} \qquad \theta_3 = \frac{-19\pi}{3}$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les 3 angles de la question précédente :



3. Donner les valeurs (sans justifier) de :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \qquad \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$$

4. Déterminer les valeurs (sans justifier) de

$$\arctan(\sqrt{3}) = \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) =$$

Exercice 2 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin(3t) = \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$
   (b) Donner les solutions de l'équation précédente dans $[0, 2\pi[$.
2. Mettre la fonction $f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$
3. Donner les valeurs de $t \in]-\pi;\pi]$ qui soient solutions de $\cos(t) > -\dfrac{1}{2}$.
4. Démontrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\cos(a) \neq 0$ et $\cos(b) \neq 0$ on a

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

Exercice 3 ***Chapitre 4 : Équations différentielles d'ordre 1*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La fonction $f(t) = t\cos(t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$-y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t\sin(t)$$

2. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, **homogène** telle que la fonction $f(t) = e^{-\frac{t}{3}}$ soit solution.
3. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, telle que la fonction $f(t) = t^3 - 3t + 4$ soit solution.

Exercice 4 ***Chapitre 4 : Équations différentielles d'ordre 1***

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

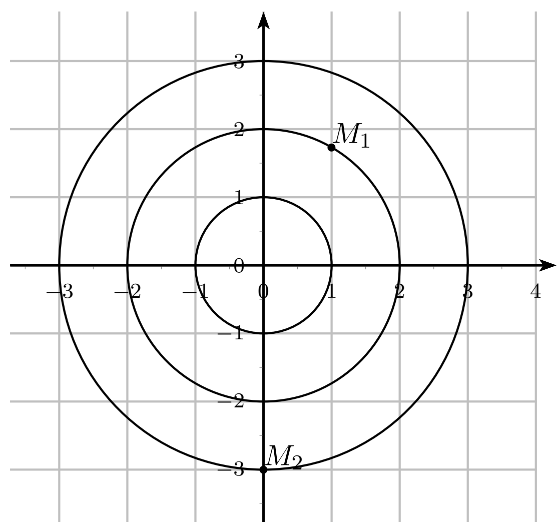
$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 16 décembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 6 : Nombres complexes***



1. Donner les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2 représentés sur le graphique suivant.

   (a) $z_1 =$ (b) $z_2 =$

2. Placer précisemment sur le même graphique les points d'affixe :

   (a) $z_3 = 2 + 3i$ (b) $z_4 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 2 ***Chapitre 6 : Nombres complexes*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Linéariser l'expression $A = \cos(4x)\sin(x)$.
2. On considère l'équation :
$$z^2 - (2\sqrt{2} + i\sqrt{3})z + 2 + i\sqrt{6} = 0$$
   Le nombre complexe $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ est-il solution ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   (a) $2z^2 - 4z - 30 = 0$ (b) $z^2 - 2z + 5 = 0$ (c) $z^2 + (2 - 4i)z - (3 + 6i) = 0$

Exercice 3 ***Chapitre 6 : Nombres complexes*** Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

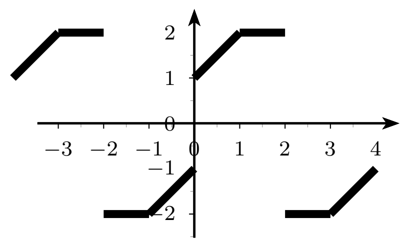
1. $z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
2. $z_2 = \overline{(1-i)}(-2+2i)^2$
3. $z_3 = 2i^7 - i^6 + 3i^5 - i^4 + i^2 - 5i + 1$
4. $z_4 = \frac{2+i}{1+3i}$
5. $z_5 = -e^{-\frac{i\pi}{6}}$
6. $z_6 = 4 - 4i$

Exercice 4 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Tracer sur $[-4,4]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie toutes les propriétés suivantes :
   - f est paire
   - f est de période 2
   - sur $[0,1]$ on a : $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -4t+4 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$
2. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = t^2 + \cos(3t)$

   (b) $g(t) = \frac{t+t^3}{t^2+1}$

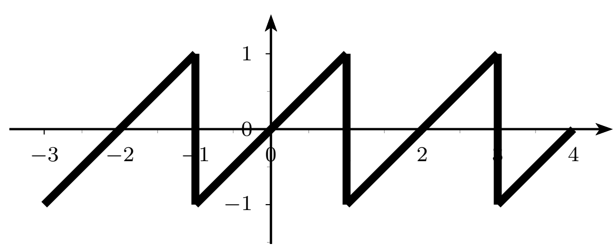
   (c) 

3. Déterminer la périodicité des fonctions suivantes :

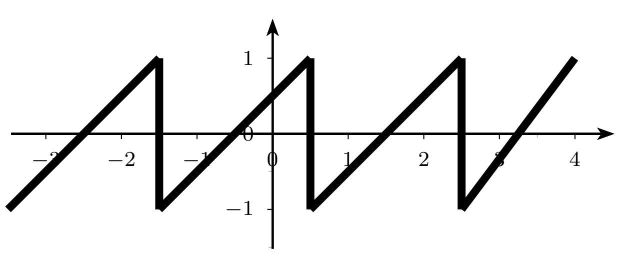
   (a) $f_2(t) = 2\cos(3t-5)$

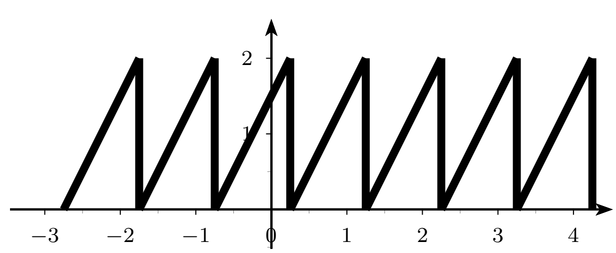
   (b) $g_2(t) = \sin(30\pi t) + \sin(24\pi t)$

Exercice 5 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques*** **Vrai ou Faux ? Justifiez votre réponse !**
On considère la fonction f suivante :



1. La courbe représentative de $f_1(t) = f(t - \frac{1}{2})$ est :

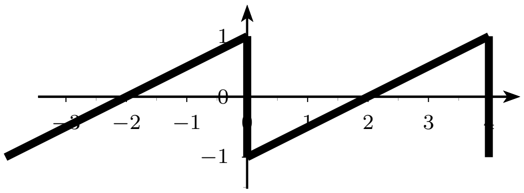




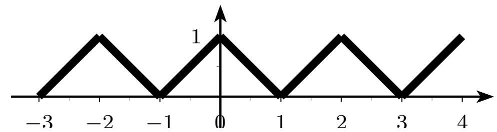
2. La courbe représentative de

   $f_2(t) = 2f(t - \frac{1}{2}) + 1$ est :

3. La courbe représentative de $f_3(t) = f(\frac{t}{2} + 1)$ est :



4. La courbe représentative de $f_4(t) = |f(t-1)|$ est :



Chapitre 9

DS de l'année 2021-2022

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 01 octobre 2021 - Durée : 2h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 1 : Rappels de calcul***
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{x^4+2x^3+4}$
2. $g(x) = (2x+1)\cos(x)$
3. $u(x) = \ln(x^2+1)$
4. $v(x) = \sqrt{3x^2+4}$

Exercice 2 ***Chapitre 7 : Rappels sur les fonctions***

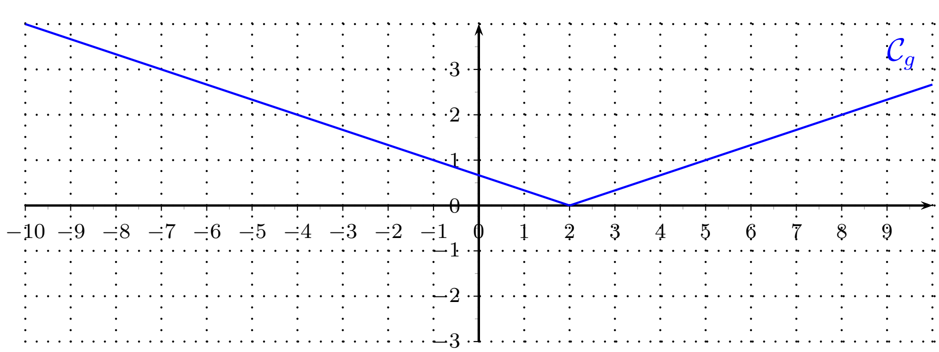
1. Déterminer les valeurs de x décrites par les inéquations suivantes :

   (a) $|x| \leq -\sqrt{3}$ (b) $|x-3| \geq 2$ (c) $|4x+1| < 1$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $|-3x| = 1$ (b) $|x-1| + |4x+6| = 25$

3. Tracer sur le graphique ci-dessous la représentationde la fonction f définie par $f(x) = \left|\dfrac{1}{2}x+2\right|$ Justifier la démarche.

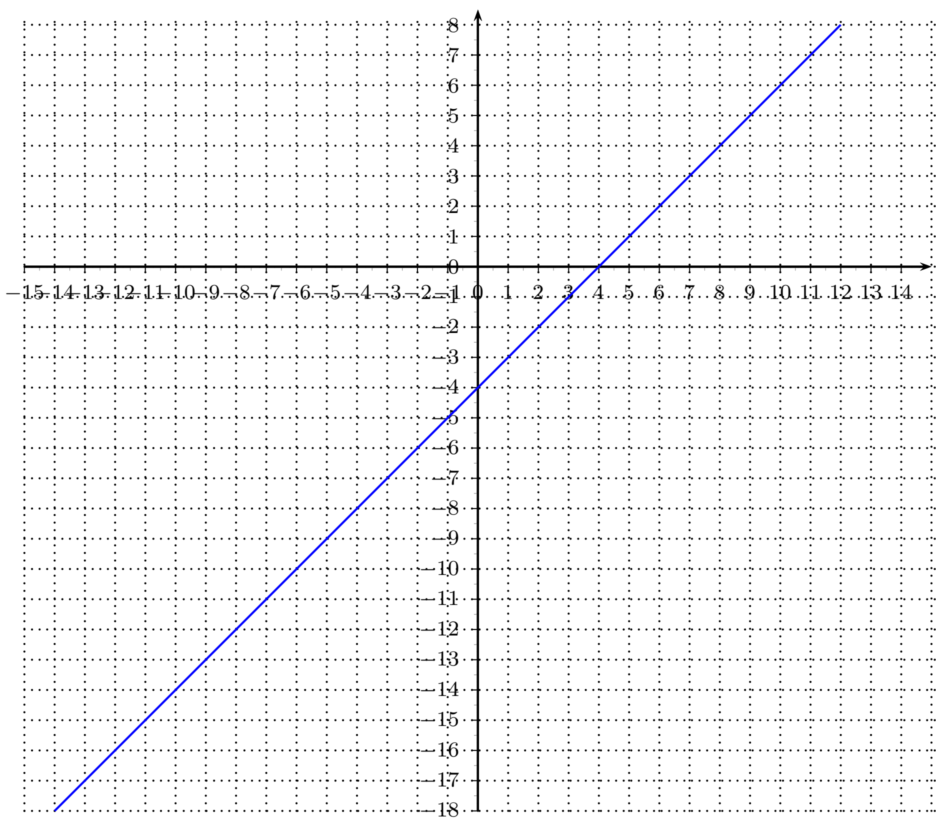


4. Déterminer l'expression de la fonction g représentée sur le graphique ci-dessus en utilisant une valeur absolue.

Exercice 3 ***Chapitre 7 : Rappels sur les fonctions***

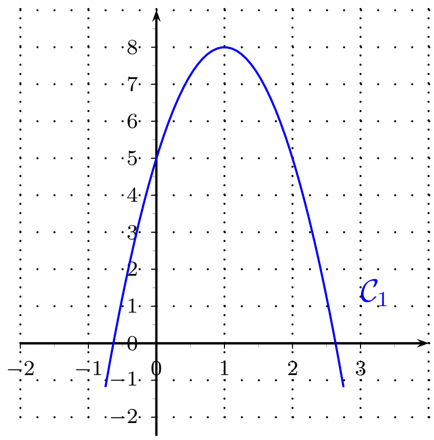
Les questions 1 et 2 ne sont **pas** indépendantes.

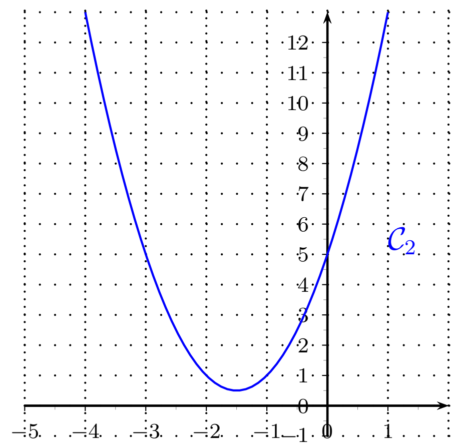
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 4x - 5 = 0$
2. Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$
   (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer la fonction dérivée de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (d) Déterminer les limites de f en -2.
   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (f) La droite tracée sur le graphique ci-dessous est asymptote à la courbe représentative de f en l'infini.
      i. Déterminer l'équation de cette droite.
      ii. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.

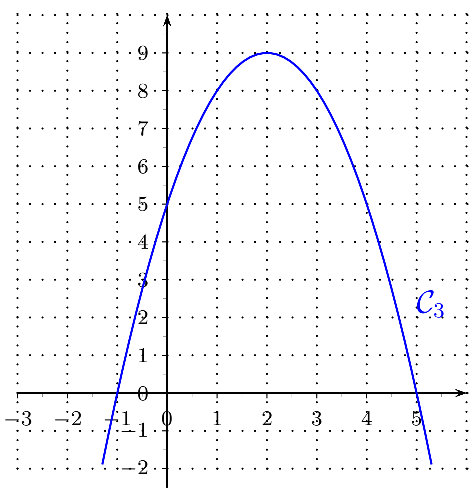


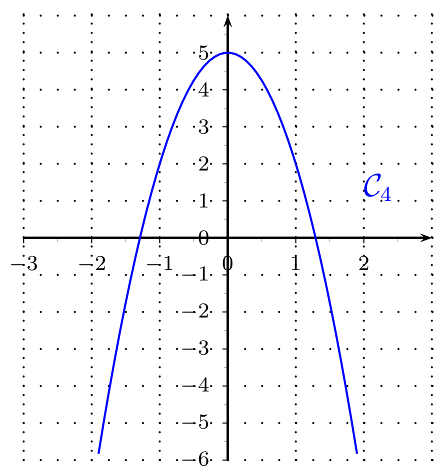
Exercice 4 ***Chapitre 7 : Rappels sur les fonctions***
On considère la fonction $f(x) = -3x^2 + 5$.

1. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui correspond à la représentation graphique de f :





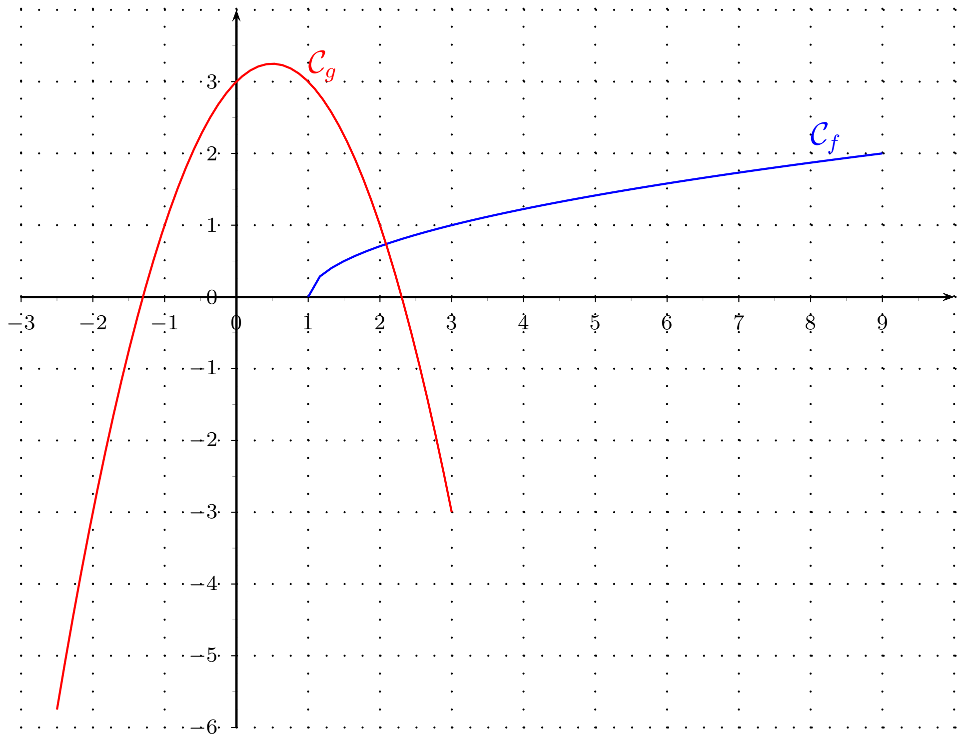




2. Déterminer l'image de 3.
3. Déterminer le(s) antécédent(s) de -31.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0; 3[$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-1; +\infty[$.

Exercice 5 ***Chapitre 7 : Rappels sur les fonctions***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère les représentations graphiques des fonctions f et g suivantes :



   Déterminer, si possible, les valeurs de :

   (a) $f \circ g(-1)$ (b) $g \circ f(-1)$ (c) $g \circ g(1)$

2. On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

   Donner les expressions des fonctions composées suivantes :

   (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g$

3. Dans chaque cas, donner deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec u et v différentes de l'identité.

   (a) $f(x) = x^5 + 2$ (b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+3)}$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 19 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 1 : Rappels de calcul***

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

1. $\dfrac{2-2^{-2}}{2+2^{-2}} = \dfrac{7}{9}$
2. Si $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{x}$ alors $x = 18$
3. Soient a et b deux réels. Si $a \neq 0$ et $a + b = 0$ alors $\dfrac{b^{2021}}{a^{2021}} = 1$
4. Soient a et b deux réels. $ab \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$ et $b \geq 0$.

Exercice 2 ***Chapitre 2 : Logique et notations mathématiques***

1. Soit la propriété $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 > b$.
   (a) Dire si la propriété P_1 est vraie ou fausse.
   (b) Écrire la négation de P_1.
   (c) La propriété non-P_1 est-elle vraie ou fausse ?
2. Dire si la propriété P_2 est vraie ou fausse :

$$P_2 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in [0; +\infty[\text{ tel que } (x+y)^2 = x^2 + y^2 + z$$

3. Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété $P_3 : \exists m \in [0; +\infty[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > m$

Exercice 3 ***Chapitre 2 : Logique et notations mathématiques***

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le signe Sigma :
   (a) $S_1 = 16 + 25 + 36 + \ldots + 400$
   (b) $S_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{8} + \ldots + \dfrac{31}{32}$
   (c) $S_3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \ldots + 171 - 172 + 173$
2. Donner la valeur exacte des deux sommes suivantes :
   (a) $S_4 = \displaystyle\sum_{k=2}^{5} k \times (k+1)$
   (b) $S_5 = \displaystyle\sum_{n=0}^{12} 17$

Exercice 4 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. Donner la mesure principale de chacun des angles suivants

(a) $\theta_1 = \dfrac{11\pi}{6}$ (b) $\theta_2 = \dfrac{31\pi}{2}$ (c) $\theta_3 = -\dfrac{49\pi}{17}$ (d) $\theta_4 = \dfrac{2677\pi}{4}$

2. Donner les valeurs de

(a) $\arctan(-1)$

(b) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(c) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

(d) $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(e) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Exercice 5 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. Donner la liste des réels $x \in]-\pi;\pi]$ qui vérifie $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \times \dfrac{\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \cos(x)$.
4. Dire si les propriétés suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sin(x + 31\pi) = -\sin(x)$

(b) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

(c) $\sin(2x)\cos(2x) = \sin(4x)$

Exercice 6 ***Chapitre 4 : équations différentielles d'ordre 1***

1. Is the function $f(t) = e^{-3t} + e^{2t}$ a solution of the differential equation $\dfrac{dy}{dt}(t) + 3y(t) = 5e^{2t}$?
2. Is the function $f(t) = \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{8}$ a solution of the differential equation : $y''(t) - 4y(t) = t^2 + 1$?
3. For each differential equation below, indicate the order and if it is linear, homogenous or has constant coefficients.
   (a) $y'(t) + 3ty(t) = 0$
   (b) $y'(t) \times y(t) = 2$
   (c) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 2t + 1$
4. Solve the differential equation : $y'(t) - 3y(t) = 0$.

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 17 décembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 4 : équations différentielles d'ordre 1*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $y'(t) + 3y(t) = 2t + 1$

(b) $\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = \cos(2t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

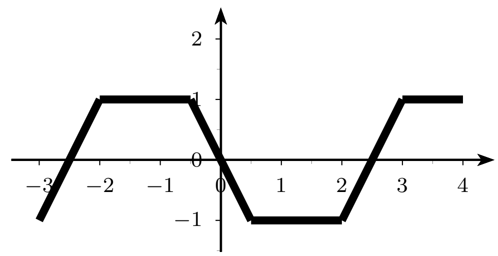
2. Donner une équation différentielle du premier ordre qui admette $f(t) = e^{-2t}$ comme solution.
3. Résoudre en fonction de U, R et L l'équation : $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U$ avec $i(0) = 0$.
4. Résoudre l'équation : $ty'(t) + 2y(t) = 0$.

Exercice 2 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques***

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f(t) = \frac{2}{(t-1)(t-2)}$

(b) $g(t) = \cos^2(4t) - \sin^2(4t)$

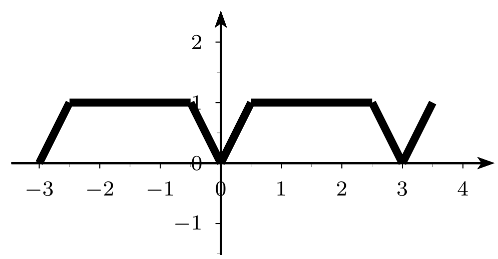
(c) 

2. Déterminer les périodes des fonctions suivantes :

(a) $f(t) = \cos(6\pi t + \pi)$

(b) $g(t) = \sin(8t + \frac{\pi}{3}) + \sin(12t)$

(c) $h(t) = h_2(\frac{t}{2})$ sachant que la fonction h_2 est $2-$périodique.

(d) 

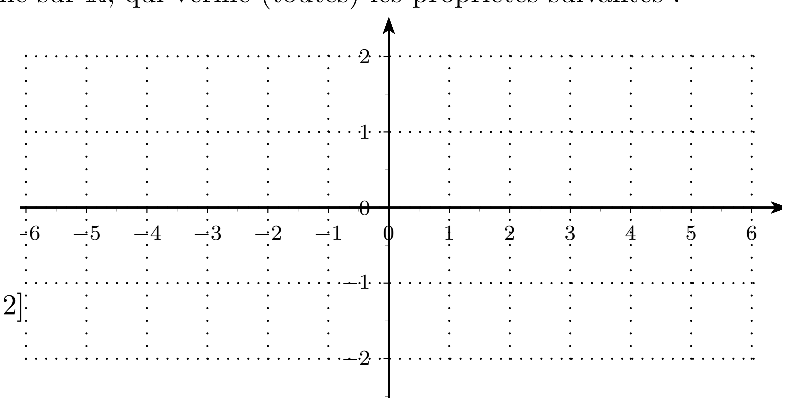
3. Tracer sur $[-6, 6]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

(a) f est impaire

(b) f est de période 4

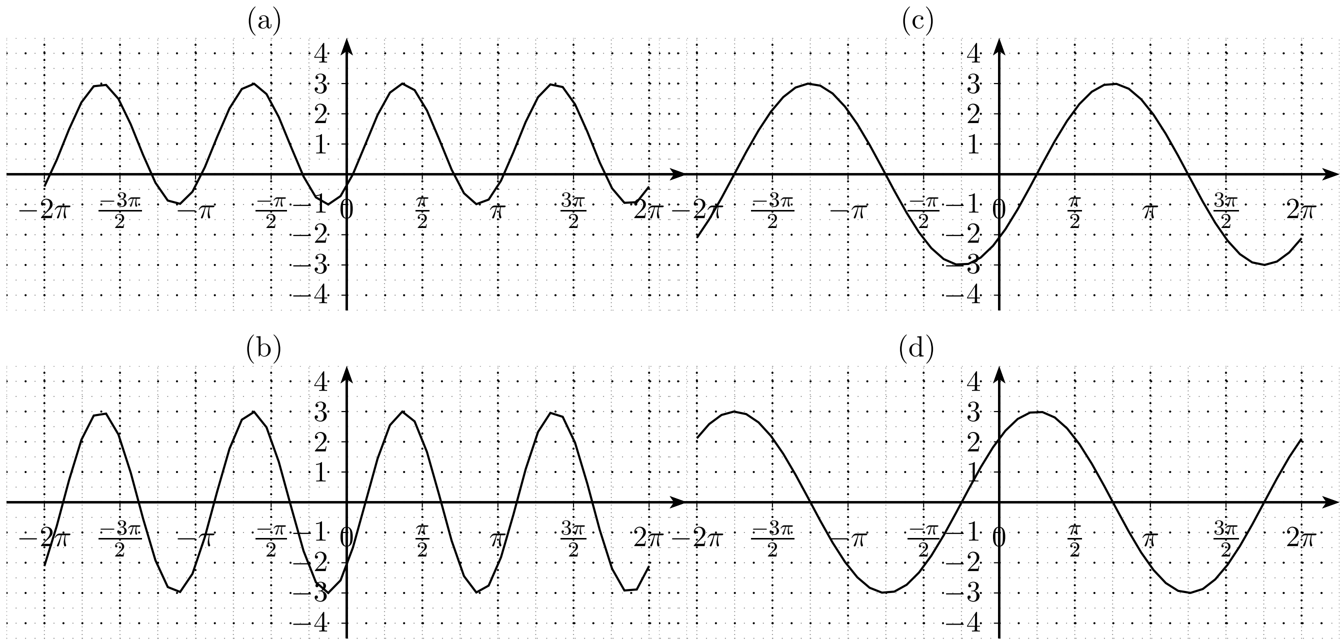
(c) sur $[0, 2]$ on a

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 0.5] \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} & \text{si } t \in [0.5, 2] \end{cases}$$



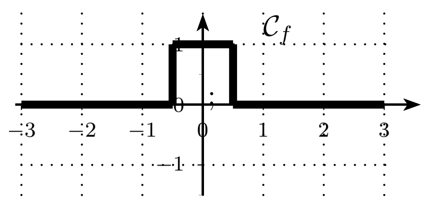
Exercice 3 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques*** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(2t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(2t)$.

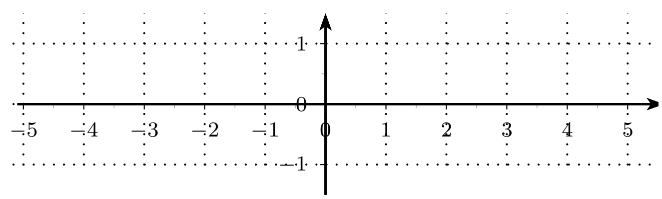
1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$.
2. Déterminer la périodicité et l'amplitude de la fonction f.
3. Parmi les courbes suivantes, indiquer en justifiant votre réponse, celle qui correspond à la courbe représentative de f.



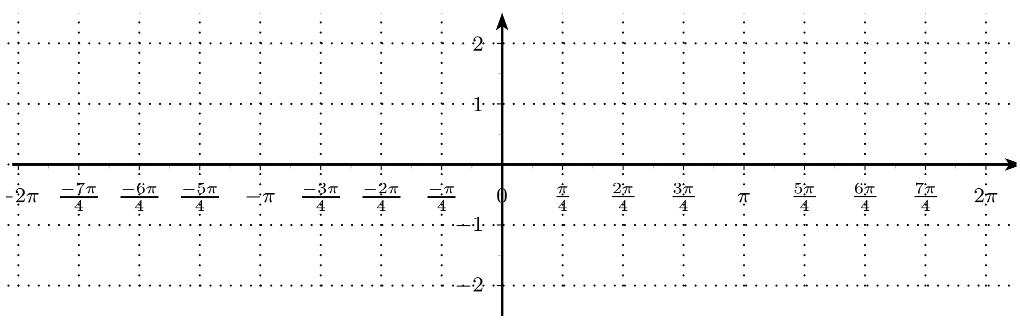
Exercice 4 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques***

1. La fonction créneau unité f est représentée ci-dessous. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci- dessous la courbe représentative de la fonction $f_1(t) = f(\frac{1}{2}t + 2)$





2. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f_2(t) = -\sin(t - \frac{\pi}{4}) + 1$



Exercice 5 ***Chapitre 6 : nombres complexes*** Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = (3 + 5i) - (2 - 3i)$
2. $z_2 = \overline{(2 - i)(2i + 1)}$
3. $z_3 = \frac{2-6i}{1+4i}$
4. $z_4 = (1 - 3i)(3 + 2i)(4 - i)$

Chapitre 10

DS de l'année 2020-2021

Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - sujet 2
Vendredi 14 novembre 2020 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 2 : Logique et notations mathématiques***
Les questions suivantes sont indépendantes

1. Écrire avec des quantificateurs la proposition suivante : "la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais".

2. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$.

3. Donner la contraposée de : Si tu échoues à ton diplome, tu ne partiras pas en vacances

4. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

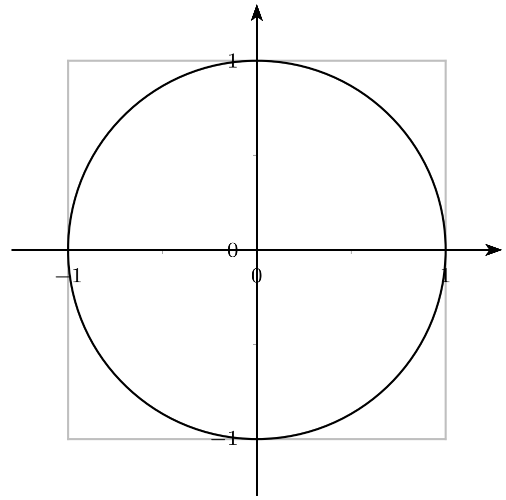
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \pi) + \cos(x + 3\pi) + \cos(x + 2\pi) = 0$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k(k+1) = 70$

Exercice 2 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner la mesure principale de $\dfrac{317\pi}{6}$.

2. Placer l'angle $\dfrac{-5\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique et donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right)$.



3. Donner toutes les solutions sur $[0; 2\pi]$ de $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

4. Mettre sous la forme $A\sin(\omega x + \varphi)$ avec $A > 0$ l'expression $f(x) = \cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)$.

Exercice 3 ***Chapitre 7 : rappels sur les fonctions***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = e^{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + 4$$

   Écrire f et g comme composées de fonctions usuelles différentes de l'identité.

2. Résoudre l'équation suivante

$$\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$$

Exercice 4 ***Chapitre 7 : rappels sur les fonctions***
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $g(t) = \sqrt{2-3t}$. Calculer $g'(t)$.

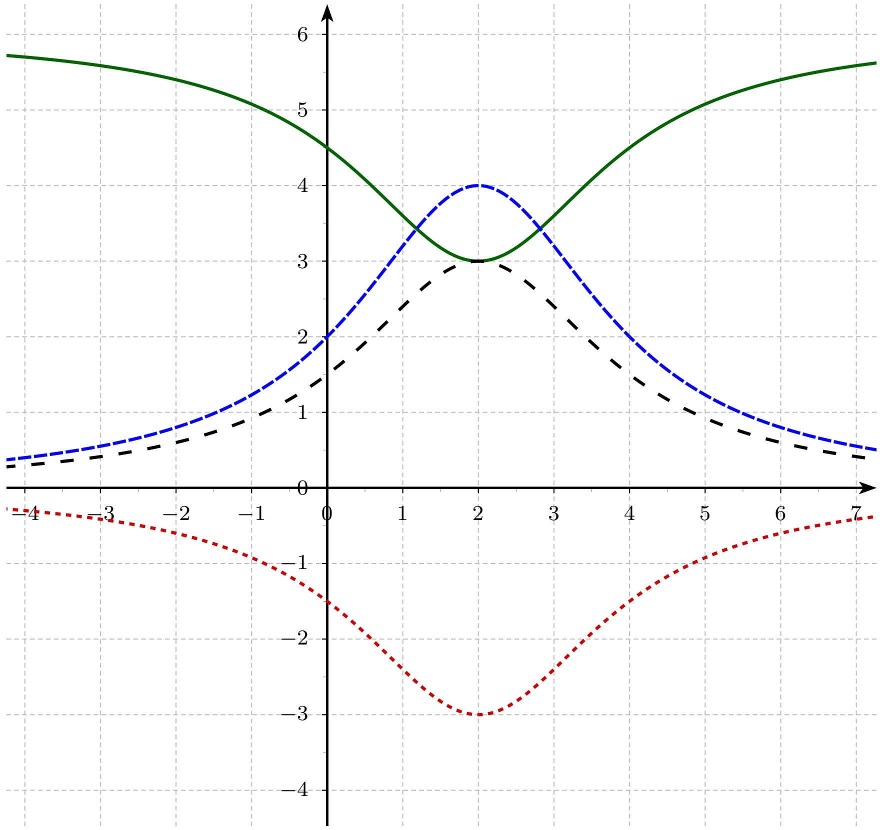
2. On considère la fonction $h(t) = \dfrac{3}{\frac{1}{4}t^2 - t + 2}$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définiton de h.

   (b) Déterminer la dérivée de h et en déduire le sens de variation de h.

   (c) Déterminer la limite de h en $-\infty$.

   (d) Parmi les courbes suivantes, quelle est la courbe représentative de h ?



Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 8 janvier 2021 - Durée : 1h

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 4 : équations différentielles d'ordre 1***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La fonction $f(x) = e^x \sin(x)$ est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (10.1) ci-dessous ?

$$y'(x)\sin(x) - y(x)\cos(x) = e^x \sin^2(x) \tag{10.1}$$

2. (a) Résoudre sur $]-1+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$xy'(x) - y(x) = 0$$

   (b) Déterminer, si elle(s) existe(nt), les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} xy'(x) - y(x) = 0 \\ y(1) = 1 \ ; \ y(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2 ***Chapitre 4 : équations différentielles d'ordre 1***

On considère l'équation différentielle suivante :

$$2y'(x) + 2y(x) = e^{-x/2} + y(x) \tag{10.2}$$

1. Déterminer le second membre ainsi que l'équation homogène associée à l'équation différentielle (10.2).
2. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle (10.2).
3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (10.2).
4. Résoudre l'équation différentielle (10.2).

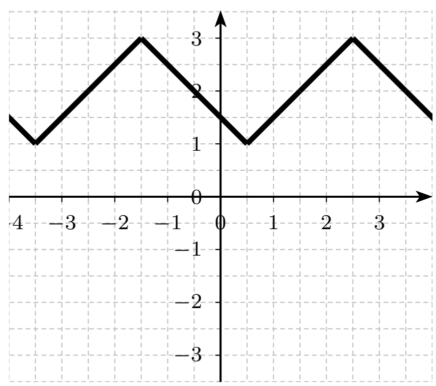
Exercice 3 ***Chapitre 5 : fonctions périodiques***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \sin(\tan(x))$ (b) $g(x) = -x^2 + x$

2. Soit h une fonction périodique de période 4 dont la courbe est :



   Déterminer les valeurs de a et b telles que la fonction $k(t) = h(t + a) + b$ soit une fonction paire, puis tracer la courbe de k sur le même graphique.

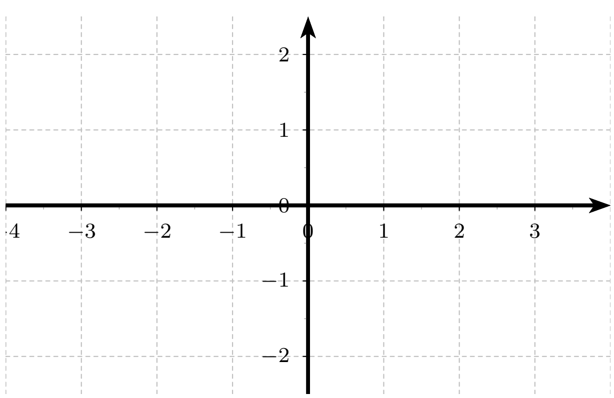
Exercice 4 ***Chapitre 6 : Nombres complexes***

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique **et** exponentielle :

   (a) $z_1 = -\pi e^{i\pi/2}$ (b) $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{1}{1-i}$

2. Placer le plus précisément possible sur le graphique ci-dessous les points d'affixes

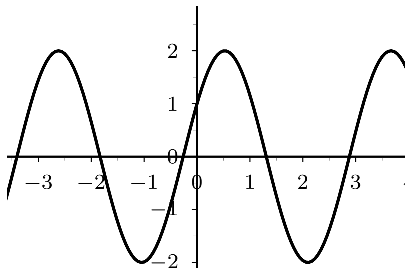
   (a) $z_1 = -2e^{-i\pi/2}$ (b) $z_2 = 3e^{i\pi/4}$ (c) $z_3 = \sqrt{3} + i$

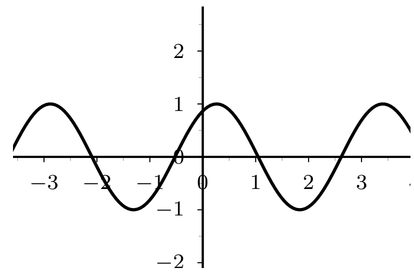


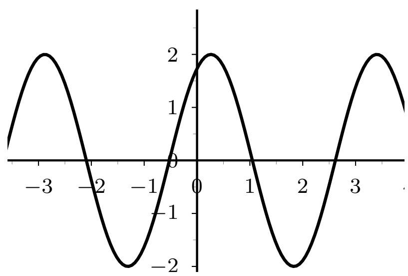
Exercice 5 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques***

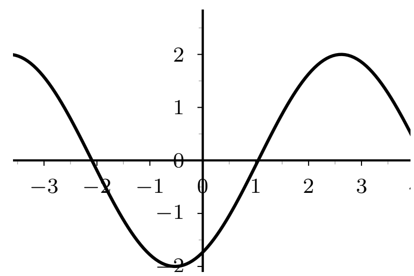
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$.

1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ avec $A > 0$
2. Déterminer la périodicité et l'amplitude de la fonction f.
3. Parmi les courbes suivantes, dire celle qui est la représentation graphique de f, en justifiant.

(a)


(c)


(b)


(d)


Exercice 6 ***Chapitre 6 : Nombres complexes***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Linéariser l'expresssion $\cos(x)\sin^2(x)$
2. (a) Déterminer les solutions de l'équation $\delta^2 = 3 + 4i$ (On pourra chercher δ sous la forme $\delta = a + ib$).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (3i - 4)Z + 1 - 7i = 0$.