# 4 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Le but de ce chapitre est de déterminer une fonction $y$ telle que l'équation (1) :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \tag{1}$$

soit vérifiée pour toute valeur de $t$ avec $a$, $b$ et $c$ des fonctions.

**Exemple 1.**

- ▷ *On considère la fonction exponentielle $y(t) = e^t$. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = e^t$. On a donc $y'(t) = y(t) \Leftrightarrow y'(t) - y(t) = 0$. Autrement dit, la fonction $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation différentielle :*

$$y'(t) - y(t) = 0$$

- ▷ *On considère $f(x) = \cos(x)$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$ et $f''(x) = -\cos(x)$. On a donc $f(x) = -f''(x) \Leftrightarrow f(x) + f''(x) = 0$. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est solution de l'équation différentielle :*

$$y''(x) + y(x) = 0$$

## 4.1 Vocabulaire

**Définition 2** (Équation différentielle)**.**
*On appelle* équation différentielle *une équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir la fonction et ses dérivées.*

**Définition 3** (Équation différentielle linéaire)**.**
*On appelle* équation différentielle linéaire *une équation différentielle dans laquelle les fonctions $y$, $y'$, $y''$,… sont additionnées entre elles.*

**Définition 4** (Équation différentielle linéaire du premier ordre)**.**
*On appelle* équation différentielle linéaire du premier ordre *une équation différentielle linéaire ne faisant intervenir que $y$ et $y'$.*

**Définition 5** (Second membre et équation homogène)**.**
*On appelle* second membre *d'une équation différentielle, tout ce qui ne dépend pas de $y$, $y'$, $y''$,… Le second membre est souvent « rangé » à droite du signe « = ». Si le second membre est nul, on dit que l'équation est* homogène

**Définition 6** (Condition initiale)**.**
*On appelle* condition initiale *associée à une équation différentielle le fait d'imposer la valeur de la fonction en un point.*

**Exemple 7.**

- $2y'(t) - 3y(t) = 5$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants*
- $y'(t)y(t) = 1$ *est une équation différentielle non linéaire du premier ordre*
- $y''(t) + 4y(t) = 0$ *est une équation différentielle homogène linéaire du second ordre à coefficients constants*
- $t^2y'(t) + (2t+1)y(t) = 0$ *est une équation différentielle homogène linéaire du premier ordre à coefficients non constants*
- $y'(t) + 2y(t) = \cos(6t)$ *est une équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre à coefficients constants de second membre* $t \mapsto \cos(6t)$.

## 4.2 Équations différentielles à coefficients constants

### 4.2.1 Équations homogènes

**Proposition 8.**
*Soient $a$ et $b$ deux constantes réelles avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle homogène $(E_{Hcc})$ :*

$$ay'(t) + by(t) = 0 \qquad (E_{Hcc})$$

*Les solutions de $(E_{Hcc})$ sont les fonctions de la forme :*

$$y_H(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$$

*pour tout $k \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

**Proposition 9.**
*Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de $(E_{Hcc})$ qui satisfasse la condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

**Exemple 10.**

*Les solutions de l'équation différentielle $7y'(t) - 3y(t) = 0$ sont les fonctions de la forme $y_H(t) = ke^{\frac{3}{7}t}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions se note :*

$$\mathcal{S}_H = \{ \ ke^{\frac{3}{7}t} \mid k \in \mathbb{R} \ \}$$

*Si on considère de plus la condition initiale $y(0) = 2$, il faut déterminer $k$ tel que :*

$$y_H(0) = ke^{\frac{3}{7}\times 0} = 2$$

*On a donc $k = 2$ et l'unique solution de* $\begin{cases} 7y' - 3y & = & 0 \\ y(0) & = & 2 \end{cases}$ *est* $y_H(t) = 2e^{\frac{3}{7}t}$

**Remarque.**

- *Sans condition initiale, une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre admet une infinité de solutions. Mais si on fixe une condition initiale il ne reste qu'une seule solution !*

### 4.2.2 Équations avec second membre

#### Ensemble des solutions

**Définition 11** (Solution particulière)**.**
*On appelle* solution particulière *de l'équation (1), une fonction notée $y_P$ qui est solution de (1) (c'est à dire que $a(t)y_P'(t) + b(t)y_P(t) = c(t)$).*

**Théorème 12.**
*Soit ($E_{cc}$) une équation différentielle linéaire et soit ($E_{Hcc}$) son équation homogène associée :*

$$ay'(t) + by(t) = c(t) \tag{$E_{cc}$}$$

$$ay'(t) + by(t) = 0 \tag{$E_{Hcc}$}$$

*On note :*

- ▷ $y_H$ *les solutions de ($E_{Hcc}$)*
- ▷ $y_P$ *une solution particulière de ($E_{cc}$)*

*Alors les solutions de ($E_{cc}$) sont les fonctions :*

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

**Théorème 13.**
*Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de ($E_{cc}$) qui satisfasse la condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

**Exemple 14.**
*On considère l'équation différentielle* $\begin{cases} 7y'(t) - 3y(t) & = & 2t \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$

1. *On résout l'équation homogène associée : $7y'(t) - 3y(t) = 0$. Les solutions sont les fonctions de la forme $y_H(t) = ke^{\frac{3}{7}t}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$*
2. *On cherche une solution particulière de $7y'(t) - 3y(t) = 2t$. $y_P(t) = -\dfrac{2}{3}t - \dfrac{14}{9}$ est une solution particulière, en effet :*
$$y_P'(t) = -\frac{2}{3}$$
*d'où*
$$7y_P'(t) - 3y_P(t) = 7 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 3\left(-\frac{2}{3}t - \frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{3} + 2t + \frac{14}{3} = 2t$$
3. *Les solutions de $7y'(t) - 3y(t) = 2t$ sont les fonctions de la forme*
$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = ke^{\frac{3}{7}t} - \frac{2}{3}t - \frac{14}{9}$$
*pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

4. *On cherche $k$ pour que la condition initiale soit vérifiée.*

$$y(0) = ke^{\frac{3}{7}\times 0} - \frac{2}{3}\times 0 - \frac{14}{9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k - \frac{14}{9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{23}{9}$$

5. *L'unique solution de* $\begin{cases} 7y'(t) - 3y(t) & = & 2t \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$ *est*

$$y(t) = \frac{23}{9}e^{\frac{3}{7}t} - \frac{2}{3}t - \frac{14}{9}$$

**Méthode**

1. Résoudre l'équation homogène associée
2. Chercher une solution particulière
3. Donner la forme des solutions
4. Chercher la valeur de la constante pour que la condition initiale soit vérifiée
5. Donner l'unique solution

**Recherche d'une solution particulière**

Pour trouver une solution particulière on imite le second membre

**Si $c(t)$ est un polynôme**

$$y_P(t) = \text{ polynôme de même degré que } c(t)$$

**Exemple 15.**

$$y' - 2y = t^2 - 3t + 1 \tag{2}$$

*On pose $y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et on cherche les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.*

$$y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

*donc*

$$y_P'(t) = 2\alpha t + \beta$$

*Comme on veut que $y_P$ soit solution de (2), on cherche $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :*

$$\begin{aligned} y_P' - 2y_P = t^2 - 3t + 1 \quad & \Leftrightarrow \quad 2\alpha t + \beta - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 - 3t + 1 \\ & \Leftrightarrow \quad -2\alpha t^2 + 2(\alpha - \beta)t + \beta - 2\gamma = t^2 - 3t + 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\alpha & = & 1 \\ 2\alpha - 2\beta & = & -3 \\ \beta - 2\gamma & = & 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha & = & -\frac{1}{2} \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

*Donc $y_P(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + t$ est une solution particulière de l'équation (2).*

**Si $c(t)$ est une fonction exponentielle** Si $c(t) = e^{\omega t}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$,

$$y_P(t) = \alpha e^{\omega t}$$

**Exemple 16.**

$$y' - 2y = e^{8t} \tag{3}$$

*On pose $y_P(t) = \alpha e^{8t}$ et on cherche le coefficient $\alpha$.*

$$y_P(t) = \alpha e^{8t}$$

*donc*

$$y_P'(t) = 8\alpha e^{8t}$$

*Comme on veut que $y_P$ soit solution de (3), on cherche $\alpha$ tel que :*

$$\begin{aligned}
y_P' - 2y_P = e^{8t} \quad &\Leftrightarrow \quad 8\alpha e^{8t} - 2\alpha e^{8t} = e^{8t} \\
&\Leftrightarrow \quad 6\alpha e^{8t} = e^{8t} \\
&\Leftrightarrow \quad 6\alpha = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

*Donc $y_P(t) = \frac{1}{6}e^{8t}$ est une solution particulière de l'équation (3).*

**Si $c(t)$ est une fonction trigonométrique** Si $c(t) = \cos(\omega t)$ ou $c(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$,

$$y_P(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

**Exemple 17.**

$$y' - 2y = \cos(3t) \tag{4}$$

*On pose $y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$ et on cherche les coefficients $\alpha$ et $\beta$.*

$$y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$$

*donc*

$$y_P'(t) = 3\beta\cos(3t) - 3\alpha\sin(3t)$$

*Comme on veut que $y_P$ soit solution de (4), on cherche $\alpha$ et $\beta$ tels que :*

$$\begin{aligned}
y_P' - 2y_P = \cos(3t) \quad &\Leftrightarrow \quad 3\beta\cos(3t) - 3\alpha\sin(3t) - 2(\alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)) = \cos(3t) \\
&\Leftrightarrow \quad (3\beta - 2\alpha)\cos(3t) - (3\alpha + 2\beta)\sin(3t) = \cos(3t) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\beta - 2\alpha &= 1 \\ 3\alpha + 2\beta &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha &= -\dfrac{2}{13} \\ \beta &= \dfrac{3}{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

*Donc $y_P(t) = -\frac{2}{13}\cos(3t) + \frac{3}{13}\sin(3t)$ est une solution particulière de (4).*

**Si $c(t)$ est solution de l'équation homogène associée**

$$y_P(t) = \alpha t c(t)$$

**Exemple 18.**

$$y' - 3y = e^{3t} \tag{5}$$

*Les solutions de l'équation homogène associée $y' - 3y = 0$ sont de la forme $y_H(t) = ke^{3t}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. On remarque donc que le second membre ($e^{3t}$) de l'équation différentielle $y' - 3y = e^{3t}$ est solution de l'équation homogène associée.*

*On pose $y_P(t) = \alpha te^{3t}$ et on cherche le coefficient $\alpha$.*

$$y_P(t) = \alpha te^{3t}$$

*donc*

$$y_P'(t) = \alpha e^{3t} + 3\alpha te^{3t}$$

*Comme on veut que $y_P$ soit solution de (5), on cherche $\alpha$ tel que :*

$$\begin{aligned} y_P' - 3y_P = e^{3t} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha e^{3t} + 3\alpha te^{3t} - 3\alpha te^{3t} = e^{3t} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha e^{3t} = e^{3t} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

*Donc $y_P(t) = te^{3t}$ est une solution particulière de (5).*

## 4.3 Équations différentielles à coefficients non constants

### 4.3.1 Équations homogènes

**Proposition 19.**
*Soient $a$ et $b$ deux fonctions à valeurs réelles. On considère l'équation différentielle homogène $(E_H)$ :*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \tag{$E_H$}$$

*Les solutions de $(E_H)$ sont les fonctions de la forme :*

$$y_H(t) = ke^{-F(t)}$$

*pour tout $k \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $a(t) \neq 0$ et où $F(t) = \displaystyle\int \frac{b(t)}{a(t)}dt$ est une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$.*

**Proposition 20.**
*Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de $(E_H)$ qui satisfasse la condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

**Exemple 21.**

*Les solutions de l'équation différentielle* $ty'(t) + (t^2 + 1)y(t) = 0$ *sont les fonctions de la forme* $y_H(t) = ke^{-F(t)}$ *pour tout* $k \in \mathbb{R}$ *avec :*

$$F(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt = \int \frac{t^2+1}{t} dt = \int \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{2} + \ln(t)$$

*On a alors :*

$$y_H(t) = ke^{-\frac{t^2}{2} - \ln(t)} = ke^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\ln(t)} = k\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{e^{\ln(t)}} = k\frac{1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

*Si on considère de plus la condition initiale* $y(1) = 1$, *il faut déterminer* $k$ *tel que :*

$$y_H(1) = k\frac{1}{1}e^{-\frac{1^2}{2}} = ke^{-\frac{1}{2}} = 1$$

*On a donc* $k = e^{\frac{1}{2}}$ *et l'unique solution de* $\begin{cases} ty'(t) + (t^2+1)y(t) & = & 0 \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$ *est* $y_H(t) = e^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{t}e^{-\frac{t^2-1}{2}}$