1 Méthode pour résoudre une équation différentielle à coefficients constants

On veut résoudre l'équation différentielle à coefficients constants :

$$ay'(t) + by(t) = c(t) \tag{E}$$

Pour cela, on applique la méthode suivante :

1. **On résout l'équation homogène associée** L'équation homogène associée à (E) s'écrit :

$$ay'(t) + by(t) = 0 \tag{EHA}$$

Les solutions de (EHA) sont de la forme :

$$y_H(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$.

2. **On cherche une solution particulière** Pour trouver une solution particulière de l'équation (E), on procède comme suit :

(a) *On détermine la forme de la solution particulière*
Pour trouver la forme de la solution particulière, on imite le second membre $c(t)$. On trouve la forme de la solution particulière grâce au tableau suivant :

Forme du second membre $c(t)$	Forme de la solution particulière $y_P(t)$	Exemple
$c(t) =$ **constante**	$y_P(t) = \alpha$	Si $c(t) = 4$ On pose $y_P(t) = \alpha$ On cherche α
$c(t) =$ **polynôme de degré** 1	$y_P(t) = \alpha t + \beta$	Si $c(t) = 3t - 2$ On pose $y_P(t) = \alpha t + \beta$ On cherche α et β
$c(t) =$ **polynôme de degré** 2	$y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$	Si $c(t) = t^2 - 2t + 1$ On pose $y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ On cherche α, β et γ
Fonction exponentielle $c(t) = e^{\omega t}$	$y_P(t) = \alpha e^{\omega t}$	Si $c(t) = e^{4t}$ On pose $y_P(t) = \alpha e^{4t}$ On cherche α
Fonctions trigo $c(t) = \cos(\omega t)$ ou $c(t) = \sin(\omega t)$	$y_P(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$	Si $c(t) = \sin(3t)$ On pose $y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$ On cherche α et β
Solution de (EHA) $c(t) = e^{-\frac{b}{a}t}$	$y_P(t) = \alpha t e^{-\frac{b}{a}t}$	Si (E) : $5y' + 2y = e^{-\frac{2}{5}t}$ On pose $y_P(t) = \alpha t e^{-\frac{2}{5}t}$ On cherche α

(b) *On dérive y_P*

(c) *On remplace dans l'équation (E) y' par y'_P et y par y_P*
On a donc l'équation :
$$ay'_P(t) + by_P = c(t)$$
On remplace alors $y_P(t)$ et $y'_P(t)$ par leur expression trouvée aux étapes précédentes et on simplifie au maximum (par exemple on regroupe les t^2, les t et les constantes si on a un polynôme, ou on regroupe les cos, les sin ou les exponentielles).

(d) *On identifie les coefficients*
On obtient une équation dont l'inconnue est α ou un système d'équations dont les inconnues sont α, β (éventuellement γ).

(e) *On résout l'équation ou le système d'équations*
On trouve le(s) coefficient(s) α, (β, γ).

(f) *On donne la solution particulière*
On réécrit la forme de y_P et on remplace le(s) coefficient(s) α, (β, γ) par les valeurs trouvées à l'étape précédentes.

3. **On donne la forme générale des solutions** Les solutions de (E) sont de la forme :
$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$
On remplace alors $y_H(t)$ et $y_P(t)$ par leur expression et on a trouvé une infinité de solutions.

4. **On prend en compte la condition initiale** Si l'énoncé donne l'équation (E) et une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on calcule $y(t_0)$ où y est de la forme trouvée à l'étape précédente et on cherche la valeur de la constante k pour avoir $y(t_0) = y_0$.

5. **On conclue** On réécrit la forme de la solution en remplaçant la constante k par sa valeur. On a alors trouvé l'unique solution.

2 Méthode pour résoudre une équation différentielle homogène à coefficients non constants

On veut résoudre l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \tag{EH}$$

Pour cela on applique la méthode suivante :

1. **On cherche les valeurs de t où** $a(t) = 0$ On appelle D l'ensemble des valeurs de t telles que $a(t) \neq 0$. (Il s'agit donc de $\mathbb{R}$ privé des valeurs trouvées.)

2. **On donne la forme des solutions de (EH)** Les solutions de (EH) sont de la forme :

   $$y(t) = ke^{-F(t)}$$

   pour tout $t \in D$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$ où $F(t) = \displaystyle\int \frac{b(t)}{a(t)}$ est une primitive de $f(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$.

3. **On cherche l'expression de** $F(t)$ Pour trouver l'expression de $F(t)$, il faut écrire l'expression de $f(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$ et trouver une primitive en utilisant les primitives usuelles.

4. **On simplifie au maximum la forme des solutions** On remplace $F(t)$ par son expression dans la forme générale des solutions $y(t) = ke^{-F(t)}$ et on simplifie au maximum l'expression. En particulier, on simplifie les expressions de la forme « exponentielle de logarithme » ($e^{\ln(t)} = t$) en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b,\ \ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a},\ \ e^{ab} = (e^a)^b$).

5. **On prend en compte la condition initiale** Si l'énoncé donne l'équation (EH) et une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on calcule $y(t_0)$ où y est de la forme trouvée à l'étape précédente et on cherche la valeur de la constante k pour avoir $y(t_0) = y_0$.

6. **On conclue** On réécrit la forme de la solution en remplaçant la constante k par sa valeur. On a alors trouvé l'unique solution.