

2 Logique et raisonnements

2.1 Notions de base de la logique

Définition 1 (IMPLICATION).

Soient P et Q deux propriétés (ou assertions). On note « $P \Rightarrow Q$ » et on lit « P implique Q » le fait que :

Si P est vraie alors Q est vraie

Exemple 2.

- ▷ $x = -2 \Rightarrow x < 0$
- ▷ $x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$ (mais $x^2 > 16 \not\Rightarrow x > 4$)

Définition 3 (NÉGATION).

Soit P une propriété. On note $\text{non-}P$ la propriété qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Exemple 4.

Si $P =$ "Tous les garçons de la classe mesurent plus de 1m90"

Alors $\text{non-}P =$ "Au moins un garçon de la classe mesure moins de 1m90"

Remarque.

$P \Rightarrow Q$ veut aussi dire que :

- ▷ P est une condition suffisante pour Q
- ▷ Q est une condition nécessaire pour P
- ▷ Parmi Q et $\text{non-}P$, au moins une propriété est vraie

Définition 5 (ÉQUIVALENCE).

Soient P et Q deux propriétés. On note « $P \Leftrightarrow Q$ » et on lit « P équivalent à Q » le fait que :

$$P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P$$

Exemple 6.

- ▷ $x = -2 \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } |x| = 2$
- ▷ $x^2 > 16 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ou } x < -4$

Remarque.

$P \Leftrightarrow Q$ veut aussi dire que :

- ▷ P est une condition nécessaire et suffisante pour Q
- ▷ $Q \Leftrightarrow P$
- ▷ P et Q sont vraies ou fausses simultanément
- ▷ P si et seulement si Q

Proposition 7.

Soient P et Q deux propriétés. On a :

1. $\{P \Rightarrow Q\} \Leftrightarrow \{\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P\}$

2. $\{P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R\} \Rightarrow \{P \Rightarrow R\}$
3. $\{P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R \text{ et } R \Rightarrow P\} \Leftrightarrow \{P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R\}$

Exemple 8.

$P =$ "Il pleut" et $Q =$ "Il y a des nuages"

$P \Rightarrow Q :$ "Si il pleut alors il y a des nuages"

$\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P :$ "Si il n'y a pas de nuage alors il ne pleut pas"

$$\{P \Rightarrow Q\} \Leftrightarrow \{\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P\}$$

2.2 Notations : \forall, \exists et Σ **Définition 9 (QUANTIFICATEURS).**

On appelle quantificateurs les symboles \forall et \exists .

- ▷ \forall signifie « pour tout » ou « quelque soit »
- ▷ \exists signifie « il existe »

Exemple 10.

- ▷ Soit la fonction $f(x) = x^2$. On peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$$

- ▷ Soit la fonction $f(x) = x^2 - 1$. On peut écrire :

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \geq 0$$

Remarque.

L'existence ne donne pas l'unicité!

Exemple 11.

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 1$. On peut écrire :

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 0$$

mais il n'y a pas unicité puisque $x = 1$ et $x = -1$ vérifient cette propriété. En effet :

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Exemple 12.

▷ " $\cos(x) = 0$ admet des solutions" s'écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos(x) = 0$$

▷ " n est un multiple de 3" s'écrit :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k$$

▷ " \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un point commun" s'écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = g(x)$$

▷ " \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} " s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$$

▷ "Les termes de la suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tous nuls" s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

▷ "Au moins deux termes de la suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont égaux" s'écrit :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_{n_1} = u_{n_2}$$

▷ " f est croissante sur \mathbb{R} " s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Exemple 13.

$$\text{non-}(\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq m) = (\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > m)$$

Remarque.

L'ordre des quantificateurs est important!

Exemple 14.

La propriété

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x + y = 0$$

est VRAIE.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, si on pose $y = -x$ alors y est bien dans \mathbb{Z} et on a $x + y = x - x = 0$.

La propriété

$$\exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{Z}, x + y = 0$$

est FAUSSE.

Pour le démontrer on montre que la négation est vraie. La négation s'écrit :

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x + y \neq 0$$

Soit $y \in \mathbb{Z}$, si on choisit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \neq -y$, alors $x + y \neq 0$. Donc pour tout $y \in \mathbb{Z}$ un tel $x \in \mathbb{Z}$ existe et on vient de démontrer que la négation est vraie et donc que la propriété est fausse.

Définition 15.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\sum_{n=1}^N u_n$ la somme des N premiers termes de la suite :

$$\sum_{n=1}^N u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N$$

Exemple 16.

$$\triangleright \sum_{n=1}^5 n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$\triangleright \sum_{n=1}^4 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 \times \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 30$$

Proposition 17.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

$$\triangleright \sum_{n=1}^N (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N b_n$$

$$\triangleright \forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^N (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^N a_n$$

$$\triangleright \forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^N \lambda = \lambda N$$

2.3 Raisonnements mathématiques**2.3.1 Raisonnement par contre-exemple**

Pour montrer qu'une propriété universelle (c'est à dire commençant par un \forall) P est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est à dire un cas pour lequel P est fausse.

Exemple 18.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } xy = 2$$

Avec $x = 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0$ donc il n'existe pas de $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 2$. Donc la propriété est fausse.

Remarque.

Pour montrer qu'une propriété existentielle (c'est à dire commençant par un \exists) P est fausse, il faut prouver que la négation non- P est vraie.

2.3.2 Raisonnement par contraposée

Définition 19.

Soient P et Q deux propriétés. On appelle contraposée de « $P \Rightarrow Q$ » l'implication « $\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P$ »

Pour montrer qu'un énoncé de la forme « $P \Rightarrow Q$ » est vrai, on peut montrer que « $\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P$ »

Exemple 20.

Pour montrer que :

$$n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$$

il est plus facile de montrer que

$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

En effet, si n est pair alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, on a alors $n^2 = 4k^2$ et donc n^2 est bien pair.