Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 7 février 2020 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

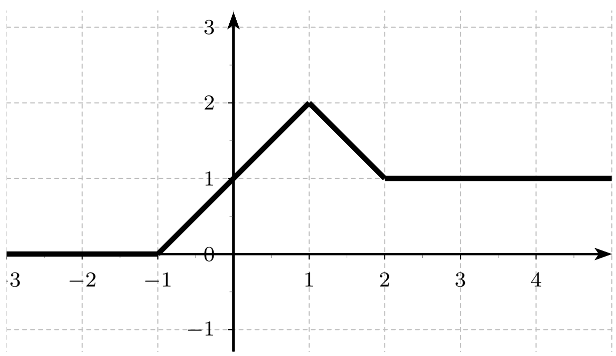
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x < 0 \\ x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$
est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de fonction :
   (a) une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et non continue en 1.
   (b) une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 2.
3. Est-ce que $\cos(x) - 1 \sim_0 x$? Répondre par vrai ou faux en justifiant.
4. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6}}{x - \sqrt{3}}$

Exercice 2

1. Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



   (a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty[$.
   (b) Exprimer $f(t)$ en fonction de t en utilisant la fonction échelon.
2. Représenter la fonction suivante $h(t) = (t+1)\mathcal{U}(t+1) + (-2t+2)\mathcal{U}(t-1) - (2-t)\mathcal{U}(t-2)$

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que f est bijective de E dans F avec E et F deux ensembles à déterminer.
2. On pose $g(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Vérifier que g est la réciproque de f.
3. Que peut-on en déduire sur les courbes représentatives de f et de g ?

Exercice 4

Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right) =$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)\right) =$
3. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) =$
4. $\arcsin\left(\cos\left(\dfrac{29\pi}{3}\right)\right) =$
5. $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)\right) =$

Exercice 5 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, sans faire le calcul, tous les produits matriciels possibles entre les matrices précédentes. Précisez dans chacun des cas la taille de la matrice produit associée.
2. Déterminer les transposées des matrices B et C.
3. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle l'inverse de la matrice B ?
4. On considère le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 2 \\ x & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

   (a) Ecrire le système (S) sous forme matricielle.
   (b) Le système (S) admet-il une unique solution ?