Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 12 février 2021 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3e^x}{2x^{10}+1} = +\infty.$
   La forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ peut être levée par croissances comparées.
   (b) $\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} + 3x - 5 = -\infty.$
   Il n'y a pas de forme indéterminée ! De plus : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} 3x-5 = -\infty$
   (c) $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2}(x-2) = 0.$
   (d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x < 2 \\ x^2-4x+4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Déterminer a pour que f soit continue en 2.
   La fonction est continue en 2 si et seulement si la limite à gauche et la limite à droite en 2 sont égales :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) &\Leftrightarrow 4+a = 4-8+4 \\ &\Leftrightarrow 4+a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -4 \end{aligned}$$

   (b) Pour la valeur de a trouvé à la question précédente, la fonction est-elle dérivalbe en 2 ?
   On remplace a par -4 puis on calcule les limites à gauche et à droite en 2 du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to2^-} \frac{2x-4}{x-2} \\ &= \lim_{x\to2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

et

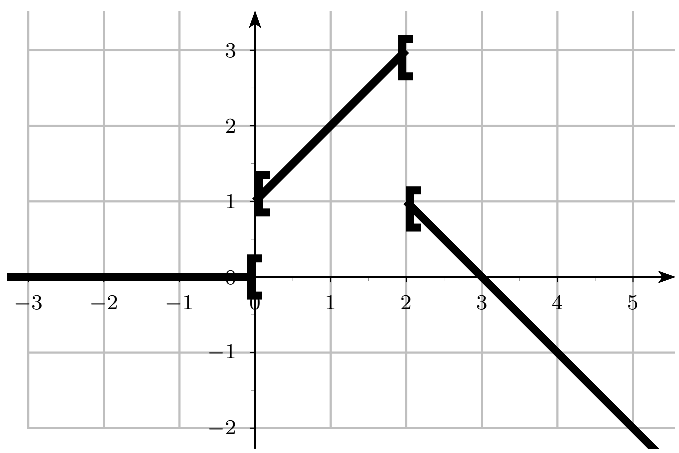
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4x+4}{x-2}\\ &= 0 \quad \text{d'après la question 1.c}\end{aligned}$$

Les deux limites ne sont pas égales donc la fonction n'est pas dérivable en 2.

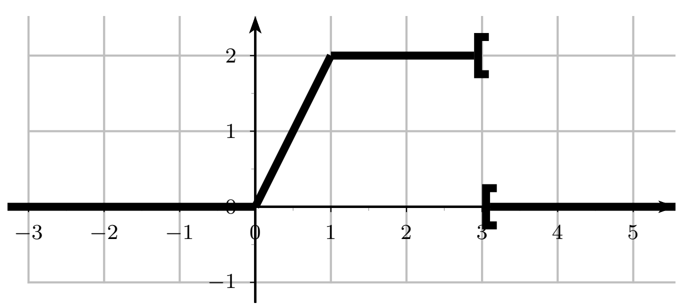
3. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui n'est pas dérivable en -1.
   Exemple 1 : $f(x) = |x+1|$. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et pas dérivable en 0. Si on avance de 1, on obtient bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en -1.
   Exemple 2 : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Tracer la courbe de la fonction : $f(t) = (t+1)\mathcal{U}(t) - (2t-2)\mathcal{U}(t-2)$.
   On peut écrire que
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t+1 & \text{si } t \in [0;2[\\ -t+3 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$
   On en déduit la représentation graphique de f :



2. Déterminer l'expression de la fonction suivante en utilisant des fonctions échelons :



   On peut écrire que
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t & \text{si } t \in [0;1[\\ 2 & \text{si } t \in [1;3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$
   Donc on en déduit que
   $$f(t) = A\mathcal{U}(t) + B\mathcal{U}(t-1) + C\mathcal{U}(t-3)$$

On détermine maintenant A, B et C sachant que $A = 2t$ et $A + B = 2$ et $A + B + C = 0$. Donc

$$f(t) = 2t\mathcal{U}(t) + (-2t+2)\mathcal{U}(t-1) + (-2)\mathcal{U}(t-3)$$

Exercice 3 Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. Soit la fonction $f(t) = -2e^{3t+5} + 1$

   (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble E à déterminer.

   - L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   - $f'(t) = -6e3t + 5$.
   - La dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty; 1[$.

   (b) Déterminer sa fonction réciproque.

   On résout $f(t) = y$ en fonction de y :

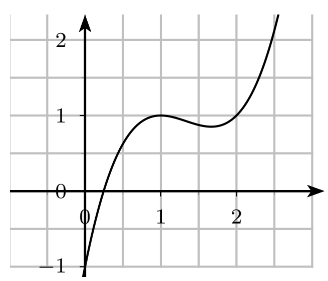
$$\begin{aligned}
f(t) = y &\Leftrightarrow -2e^{3t+5} + 1 = y \\
&\Leftrightarrow -2e^{3t+5} = y - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{3t+5} = \frac{y-1}{-2} \\
&\Leftrightarrow 3t + 5 = \ln\left(\frac{1-y}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow 3t = \ln\left(\frac{1-y}{2}\right) - 5 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{1-y}{2}\right) - 5\right)
\end{aligned}$$

   La fonction réciproque de f est donc $f^{-1}(t) = \dfrac{1}{3}\left(\ln\left(\dfrac{1-t}{2}\right) - 5\right)$.

   (c) L'équation $-2e^{3t+5} + 1 = 2$ admet-elle une unique solution ?

   f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty; 1[$; or 2 n'appartient pas à l'ensemble image $]-\infty; 1[$. Donc l'équation n'admet pas de solution.

2. On considère la courbe de la fonction $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.



   Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse :

   (a) g est injective de $[1; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$. FAUX

   On peut observer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la courbe change de sens de variation (décroissante puis croissante). Il y a donc des $y \in [1; +\infty[$ qui ont 2 antécédents.

(b) g est surjective de $[0;2]$ dans $[-1;1]$. VRAI
Toutes les valeurs de $[-1;1]$ ont au moins un antécédent dans $[0;2]$.

(c) g est bijective de $]0;1[$ dans $]-1;1[$. VRAI
Toutes les valeurs de $]-1;1[$ ont exactement un antécédent dans $]0;1[$.

Exercice 4 Déterminer les valeurs suivantes en expliquant brievement la démarche (soit par des calculs soit par un dessin).

1. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$
   car $\frac{3\pi}{4}$ est la valeur de l'intervalle $[0;\pi]$ dont le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
   car $-\frac{\pi}{3}$ est la valeur de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
   car $-\frac{\pi}{4}$ est la valeur de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut -1.

4.
$$\begin{aligned}
\arccos\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) && \text{car cosinus est } 2\pi \text{ périodique}\\
&= \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) && \text{car cosinus est pair}\\
&= \frac{3\pi}{4} \quad \text{car } \frac{3\pi}{4} \in [0;\pi]
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) && \text{car sinus est } 2\pi \text{ périodique}\\
&= \arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{6}\right)\right)\\
&= \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= -\frac{\pi}{6} \quad \text{car } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}
\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right)\\
&= \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)\\
&= \frac{5\pi}{14} \quad \text{car } \frac{5\pi}{14} \in [0;\pi]
\end{aligned}$$