Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 18 février 2022 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient les nombres complexes :

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad Z_2 = 1 - i \quad Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} \quad Z_4 = Z_3^8$$

(a) Mettre Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

$$|Z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad arg(Z_1) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{donc} \quad Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$|Z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad arg(Z_2) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{donc} \quad Z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{pi}{4}}$$

(b) Donner le module et l'argument de Z_3.

$$|Z_3| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$
$$arg(Z_3 = arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = arg\left(Z_1\right) - arg\left(Z_2\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

(c) Donner la forme algébrique de Z_4.

$$Z_4 = (Z_3)^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^8 = \sqrt{2}^8 e^{8\times i\frac{7\pi}{12}} = 2^4 e^{i\frac{14\pi}{3}} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc

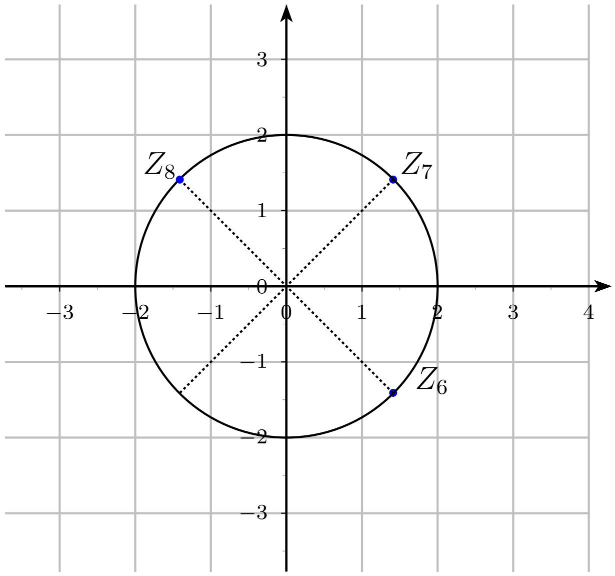
$$Z_4 = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8i\sqrt{3}$$

2. Déterminer la forme algébrique de $Z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 4e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}e^{3i\pi}$.

$$\begin{aligned}
Z_5 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 4e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}e^{3i\pi} \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + 2\sqrt{3}\times i + \sqrt{3}\times(-1) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} - i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{3}\times i + \sqrt{3}\times(-1) \\
&= \sqrt{3} + i + 2 - i\times 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\times i + \sqrt{3}\times(-1) \\
&= 2 + i
\end{aligned}$$

3. Sur le graphique ci-dessous, placer précisément les points d'affixe :

$$Z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad Z_7 = \overline{Z_6} \quad \text{et} \quad Z_8 = -Z_6$$



Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire la matrice inverse de A.
On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'inverse de A est A.

2. Déterminer la matrice B telle que

$$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = 3^{j-i}$$

B est une matrice avec 2 lignes et 3 colonnes et la coefficients valent :

$$B \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soient les matrices C, D et E suivantes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indiquer les calculs qui sont possibles et ceux qui sont impossibles (on ne demande pas de faire les calculs) : $C + E$, $C \times E$, $E \times C$, et C^2.

- $C + E$ est impossible, les matrices n'ont pas les mêmes dimensions.

- $C \times E$ est possible, le nombre de colonnes de C est égal au nombre de lignes de E.
- $E \times C$ est impossible, le nombre de colonnes de E n'est pas égal au nombre de lignes de C.
- C^2 est impossible car C n'est pas carrée.

4. Donner un exemple de matrice triangulaire supérieure.
   Il faut donner une matrice avec des 0 sous la diagonale :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Donner un exemple de matrice F de taille 3×3 telle que ${}^tF = F$.
   Il faut donner une matrice dont le coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Donner l'écriture matricielle du système (on ne demande pas de résoudre) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} 2x & -y & = 3 \\ 3x & +y & = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+4)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3}(x + 4) = 7$
3. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3e^x}{\ln(x) + 10} = \dfrac{-\infty}{+\infty} = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\ln(x)+10} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^{-\ln(x)+10} = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+1} + 3x - 5 = -\infty$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-x^2+3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1+x^2-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 3x - 1) - 3\ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 3x - 1) - \ln(x^3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^3}\right)$
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 3x - 1) - 3\ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

Exercice 4 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$$

Donc f est continue en 0.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.