Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 9 février 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   La fonction exponentielle n'a pas de valeur interdite, donc $D_f = \mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f.
   La fonciton est de la forme e^u donc

$$f'(x) = u'e^u = (-2x+2)e^{-x^2+2x-1}$$

   La fonction exponentielle est strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+2$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et compléter le tableau de variation de f.

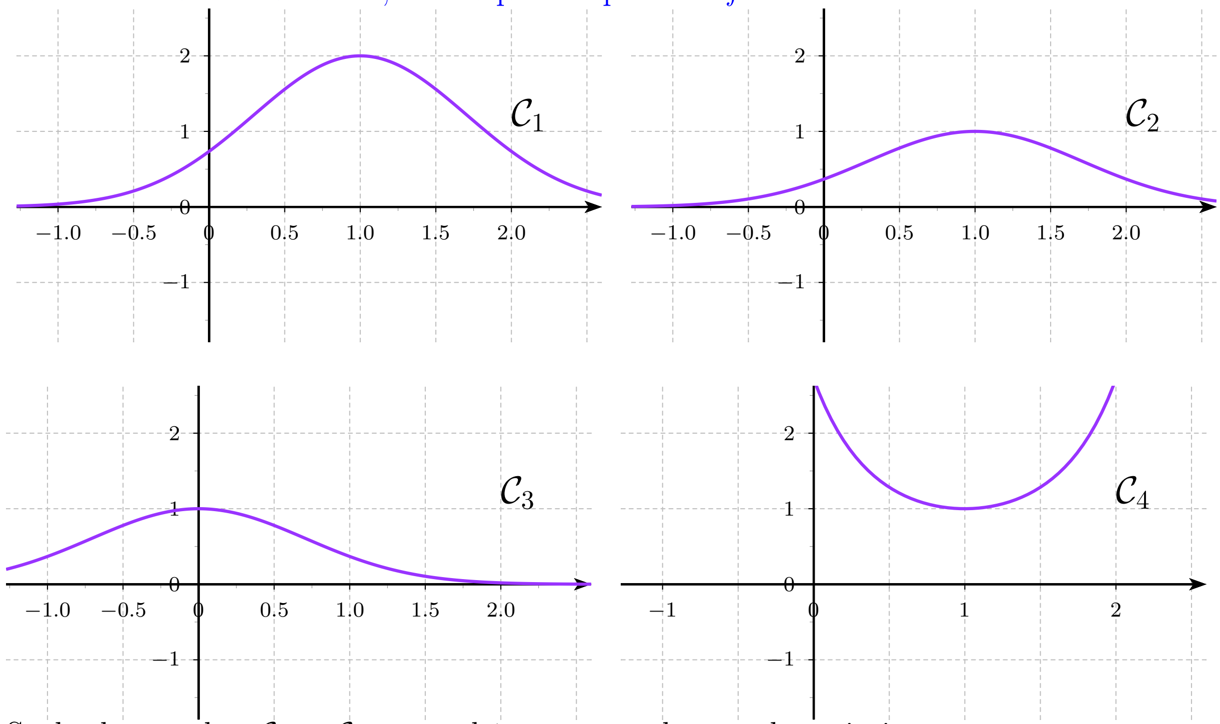
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+2x-1} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$$

   Ainsi on complète le table :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4. Parmi les courbes suivantes, dire laquelle représente f :



Seules les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont cohérentes avec le sens de variation.
Par ailleurs, $f(0) = e^{-1+2-1} = e^0 = 1$.
Donc la courbe de f est la courbe $\mathcal{C}_2$.

Exercice 2

1. Soient les fonctions $f_1(x) = \sqrt{2x-1}$, $g_1(x) = \cos(x+2)$ et $h_1(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Déterminer
   (a) $f_1 \circ g_1(x) = f_1(\cos(x+2)) = \sqrt{2\cos(x+2) - 1}$
   (b) $h_1 \circ g_1(x) = h_1(\cos(x+2)) = \dfrac{\cos(x+2)}{\cos(x+2)+2}$
   (c) $h_1 \circ h_1(x) = h_1(\dfrac{x}{x+2}) = \dfrac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2}$
2. On considère la fonction $f(x) = (x+3)^3 - 5$. Décomposer f sous la forme $w \circ v \circ u(x)$ avec w, v et u trois fonctions différentes de l'identité. On pose
   $w(x) = x - 5$
   $v(x) = x^3$
   $u(x) = x + 3$
3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   (a) $|2x-3| = 7$
   Deux possibilités :
   $2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$
   ou
   $2x - 3 = -7 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$
   Ainsi $S = \{-2; 5\}$.
   (b) $|x+5| < 2$
   L'inéquation peut se traduire par : « distance entre x et -5 strictement inférieure à 2 »
   Les nombres qui sont à une distance 2 de -5 sont : -7 et -3

Les nombres qui sont à une distance strictement inférieure à 2 sont

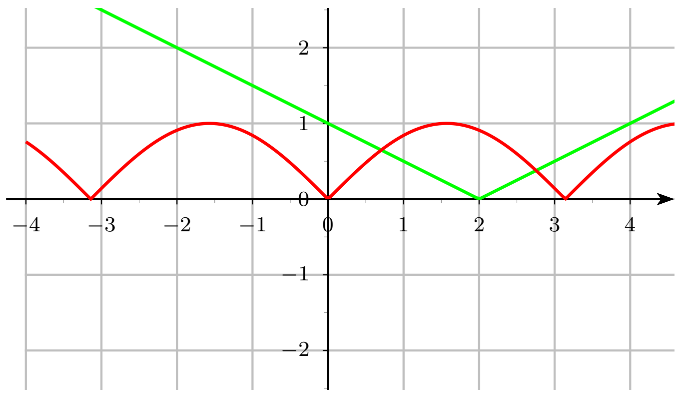
$$S =]-7;-3[$$

(c) $|3x+1| = |x-2| + 1$

4. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions suivantes

(a) $f(x) = |1 - \frac{1}{2}x|$

(b) $g(x) = |\sin(x)|$



Pour tracer les courbes représentatives de f et g on trace d'abord les fonctions $x \to 1 - \frac{1}{2}x$ et $x \to \sin(x)$ puis on « redresse »les parties négatives.

Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^{x-3}}$

Sous cette forme, la limite est une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. On regroupe les exponentielles pour retirer l'indeterminée

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{e^{x-3}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x+1-x+3} \\ &= e^4 \end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x-4}$

Sous cette forme, la limite est une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. On peut répondre par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x-4} = 0$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

Il n'y a pas de forme indéterminée

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x+2}\right) &= \ln\left(0^+\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

(d) $\lim_{x\to+\infty} x + e^{-x} - \ln(x)$
Il y a une forme indéterminée de type $\infty - \infty$. On peut répondre par croissances comparées :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x + e^{-x} - \ln(x) &= +\infty + 0 - \infty \\ &= +\infty\end{aligned}$$

(e) $\lim_{x\to-3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6}$
Il n'y a pas de forme indéterminée

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-3} \frac{x^2+x-6}{x^2-6} &= \frac{9-3-6}{9-6} \\ &= \frac{0}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$
f est de la forme $\sqrt{u}$ donc

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

(b) $g(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
g est de la forme $\cos(u)$ donc

$$g'(x) = -u'\sin(u) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(c) $h(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$
h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc

$$h'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{3(2x-1) - 2\times 3x}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$$

(d) $k(x) = (3x+4)\ln(-2x+1)$
k est de la forme uv donc

$$k'(x) = u'v + uv' = 3\ln(-2x+1) + (3x+4)\times\frac{-2}{-2x+1}$$

Exercice 4

1. Déterminer le module et l'argument de : $z = \dfrac{R_1 + jC\omega}{R_2 + jC\omega}$

$$|z| = \frac{|R_1 + jC\omega|}{|R_2 + jC\omega|} = \frac{\sqrt{R_1^2 + (C\omega)^2}}{\sqrt{R_2^2 + (C\omega)^2}}$$

et

$$arg(z) = arg(R_1 + jC\omega) - arg(R_2 + jC\omega) = \arctan\left(\frac{C\omega}{R_1}\right) - \arctan\left(\frac{C\omega}{R_2}\right)$$

2. Déterminer ω en fonction de ω_0 : $1+\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{\omega}{2\omega_0}$

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{\omega}{2\omega_0} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega}{2\omega_0}=-1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\omega}{2\omega_0}-\frac{\omega}{2\omega_0}=-1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega}{2\omega_0}=-1 \\
\Leftrightarrow\ & \omega=-2\omega_0
\end{aligned}$$

Exercice 5 On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

1. Les calculs suivants sont-ils possibles ? Si oui, faites le calcul !
   (a) $A+C$ est impossible car A et C n'ont pas les mêmes dimensions.
   (b) $A\times B=\begin{pmatrix}27\\4\end{pmatrix}$
   (c) $4\times C=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 8 & -24\end{pmatrix}$
   (d) $B\times C$ est impossibles car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de C.
   (e) ${}^tA=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice D telle que :$D\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $d_{i,j}=2i-j$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3. On considère les matrices E et F, sont elles l'inverse l'une de l'autre ?

$$E=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}3 & 10\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier si le produit $E\times F$ est égal à l'identité :

$$E\times F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\neq I$$

Donc non, E et F ne sont pas l'inverse l'une de l'autre.