Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 5 avril 2018 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit la fonction $F(X) = \dfrac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X - 1}{X^3 + 2X^2 + X}$.

1. Déterminer les polynômes $E(X)$ et $D(X)$ tels que $F(X) = E(X) + \dfrac{D(X)}{X^3 + 2X^2 + X}$ avec $deg(D) < 3$.
2. Factoriser le polynôme $Q(X) = X^3 + 2X^2 + X$.
3. Donner la forme de la D.E.S. de F.
4. Donner la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 2

On souhaite étudier la propriété suivante :
Le produit de 4 nombres entiers qui se suivent auquel on ajoute 1 est toujours le carré d'un nombre entier $(\star)$

Exemple : $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

1. Soient N un nombre entier et $P(N)$ le résultat du produit de N par les 3 entiers suivants auquel on ajoute 1. Montrer que
$$P(N) = N^4 + 6N^3 + 11N^2 + 6N + 1$$
2. Poser la division euclidienne de P par $N^2 + 3N + 1$.
3. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.
4. Dire si la propriété $(\star)$ est vraie ou fausse puis donner la valeur de $\sqrt{15 \times 16 \times 17 \times 18 + 1}$.

Exercice 3 Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Il n'existe pas de polynôme de degré 5 à coefficients réels qui admette 3 comme racine triple et i comme racine double.
2. Le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^6 - 3X^2 - 3$ par $X - 1$ est nul.
3. Soit P un polynôme. Si $P'(3) = 0$ alors 3 est racine de P de multiplicité au moins 2.
4. Il existe un polynôme P tel que $P(X^3 + 1) = X^3 P(X)$.
5. La forme de la D.E.S. de $F(X) = \dfrac{2X - 7}{(X+1)(X^2 + 3X + 1)}$ est $F(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X^2 + 3X + 1}$

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer les déterminants de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Donner une matrice de taille 3 dont le déterminant vaut -3.
4. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} & y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +5z & = & -7 \\ x & +2y & +4z & = & 0 \end{cases}$$