Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Correction
Vendredi 17 mai 2019 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.

1. Déterminer q et U_0 sachant que $U_3 = \dfrac{1}{32}$ et $U_6 = \dfrac{1}{2048}$.

   On a $u_3 = q^3 U_0 = \dfrac{1}{32}$ *et* $u_6 = q^6 U_0 = \dfrac{1}{2048}$.
   D'où $\dfrac{u_6}{u_3} = q^3 = \dfrac{32}{2048} = \dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{4^3}$ *puis* $q = \dfrac{1}{4}$.
   Ensuite, on détermine les valeurs de U_0,

   $$u_3 = q^3 U_0 \Leftrightarrow \frac{1}{32} = \frac{1}{4^3} U_0 \Leftrightarrow U_0 = 2$$

2. Déterminer, en fonction de N, la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} U_k$.

   $$S_N = \sum_{k=2}^{N} U_k = U_2 \times \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4^{N-1}}\right)$$

3. Que vaut la limite de S_N quand N tend vers $+\infty$?

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{6}$

Exercice 2 Dire si les suites suivantes sont arithmétiques, géométriques ou ni l'une ni l'autre et préciser, le cas échéant, la valeur de la raison.

1. $U_n = n^3$
   On a $U_0 = 0$, $U_0 = 1$ *et* $U_2 = 8$. *D'où* $U_1 - U_0 = 1 \neq 6 = U_2 - U_1$ *ce qui prouve que la suite n'est pas arithmétique.*
   Et $\dfrac{U_0}{U_1} = 0 \neq \dfrac{1}{8} = \dfrac{U_1}{U_2}$ *ce qui prouve que la suite n'est pas géométrique.*

2. $U_n = (2n+1)^2 - (n+2)(1+4n)$
   En développant, on trouve que $U_n = -5n - 1$. *On reconnait une suite arithmétique de raison -5.*

3. $U_n = \dfrac{5}{\sqrt{3^{4n}}}$

   Calculons $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\sqrt{3^{4n}}}{\sqrt{3^{4(n+1)}}} = \sqrt{\dfrac{3^{4n}}{3^{4n+4}}} = \sqrt{\dfrac{1}{3^4}} = \dfrac{1}{9}$. *On en déduit que* (U_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{9}$

4. $U_n = e^{-2n}$

   Calculons $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{e^{-2(n+1)}}{e^{-2n}} = e^{-2}$. *On en déduit que* (U_n) *est une suite géométrique de raison* e^{-2}

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$

   Une primitive de $\dfrac{e^{1/x}}{x^2} = -\left(-\dfrac{1}{x^2} \times e^{1/x}\right)$ *est* $-e^{1/x}$ *d'où* $I = \left[-e^{1/x}\right]_1^2 = e - \sqrt{e}$

2. $J = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{d}x$

   Une primitive de $\sin^4(x)\cos(x)$ *est* $\dfrac{\sin^5(x)}{5}$ *d'où* $J = \left[\dfrac{\sin^5(x)}{5}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dfrac{2}{5}$

3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\mathrm{d}x$

   En effectuant la division euclidienne de x^3+1 *par* $x+1$, *on trouve que* $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ *d'où* $\dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$ *puis* $K = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \dfrac{5}{6}$

4. $L = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\mathrm{d}x$

   Pour calculer L, il faut linéariser. Pour cela, on peut soit utiliser les formules de trigonométrie, soit les formules d'Euler. On obtient : $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$ *d'où* $L = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(2x)}{2} + x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{2}$

5. $M = \displaystyle\int_0^2 |t^2 - 3t + 2|\mathrm{d}t$

   Pour enlever la valeur absolue, il faut connaître le signe de $P(t) = t^2 - 3t + 2$. *Les racines de* $P(t)$ *sont* $t_1 = 1$ *et* $t_2 = 2$: $P(t)$ *est négatif pour* $t \in [1,2]$ *et positif ailleurs. D'où*

   $$M = \int_0^1 t^2 - 3t + 2\mathrm{d}t + \int_1^2 -t^2 + 3t - 2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right]_0^1 + \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 2t\right]_1^2 = 1$$

6. $N = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

   Une primitive de $\dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = -\dfrac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ *est* $-\arctan(\cos(x))$ *d'où* $N = [-\arctan(\cos(x))]_0^\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

7. $P = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$
(on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$)
On a $x = \sin(u)$ *donc* $dx = \cos(u)du$
et $\begin{array}{c|c|c} x & -1 & 1 \\ \hline u & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array}$
d'où $P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(u)}\cos(u)du.$
Or $\cos(u) \geq 0$ *pour* $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *d'où* $\sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u)$ *et* $P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du = L = \frac{\pi}{2}$

Exercice 4 Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

1. Faire la D.E.S. de $f(x)$
On obtient $\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)} = -\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$

2. Montrer qu'une primitive de $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est $\arctan(x+1)$.
On a $\dfrac{1}{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ *d'où le résultat.*

3. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$.
Une primitive de $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ *est* $\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$.
Donc
$$F(x) = -2\ln|x+1| + \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$$

Exercice 5

1. Montrer que $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$
On peut réduire au même dénominateur ou faire la division euclidienne

2. Déterminer une primitive de $\dfrac{x^3}{1+x^2}$
Une primitive de $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ *est* $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$

3. En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_{-1}^{1} x^2\arctan(x)dx$
On dérive $\arctan(x)$ *et on intègre* x^2*, on obtient :*
$$\int_{-1}^{1} x^2\arctan(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\arctan(x)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx = \left[\frac{x^3}{3}\arctan(x)\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

4. Aurait-on pu prévoir le résultat précédent ?
Oui car la fonction est impaire et on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0.