

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 25 juin 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$(a) f_1(x) = \cos^2(x) \sin(x) \qquad (c) f_3(x) = \frac{e^x}{-2 + e^x} \qquad (e) f_5(x) = \sin(3x + \pi)$$

$$(b) f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \qquad (d) f_4(x) = \frac{x^4}{3} + 2x^3 + 1 \qquad (f) f_6(x) = x\sqrt{1 + x^2}$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) g_1(x) = \int_0^1 te^{2t+1} dt$$

$$(c) g_3(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \sin(3x) dx$$

$$(b) g_2(x) = \int_0^{1/2} \frac{2x+1}{x^2-1} dt$$

$$(d) g_4(x) = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx \text{ (on pourra effectuer le changement de variable } x = 1 - t)$$

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$(a) I = \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+2t} dt$$

$$(b) J = \int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

2. Soit $X > 1$.

(a) i. Calculer $K(X) = \int_1^X \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.

ii. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

(b) i. Calculer $L(X) = \int_1^X \frac{1}{x \ln(x)} dx$

ii. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

Exercice 3

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_{10} , u_{20} et u_{100}
2. Une suite arithmétique (u_n) de raison 2 est telle que $u_0 = 1$ et N étant un nombre entier tel que $\sum_{i=3}^N u_i = 520$. Calculez N . (*Indication* : $22^2 = 484$ et $46^2 = 2116$)
3. Une suite géométrique u de raison $r = \frac{1}{4}$ et $u_0 = 32$. Calculez u_2 , u_3 , u_5 et u_8
4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison r . Sachant que $u_1 = -1$ et $u_3 = 1$, calculer r , u_0 et u_5

Exercice 4

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{2t} \cos(\pi t)\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = \cos(\pi t)\mathcal{U}(t - 1)$
5. $f_5(t) = \frac{t^2}{3}\mathcal{U}(t) + \frac{t}{\sqrt{2}}\mathcal{U}(t)$

Exercice 5

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$
2. $F_2(p) = \frac{1}{p^2 + 4}$
3. $F_3(p) = \frac{p - 1}{p^2 - 2p + 2}$
4. $F_4(p) = e^{-\pi p} \frac{p}{p^2 + 9}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n \mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p + a}$
$f(t - \tau)\mathcal{U}(t - \tau)$	$\mathcal{L}_f(p)e^{-\tau p}$
$f + \lambda g$	$\mathcal{L}_f + \lambda \mathcal{L}_g$
$e^{-at}f(t)\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{L}_f(p + a)$
$f'(t)$	$p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$