

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 2 juin 2023 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{6x + 15}{x^2 + 1}$

3. $f_3(x) = \frac{6x + 15}{x^2}$

2. $f_2(x) = \frac{6x + 15}{x^2 + 5x + 1}$

4. $f_4(x) = \frac{6x + 15}{7}$

Exercice 2 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \int_2^3 (4t - 2) \ln(t - 1) dt$

2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \cos(5t) dt$

3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x) \cos^3(2x) dx$

(indication : on pourra poser le changement de variable $t = \sin(2x)$)

4. $I_4 = \int_0^{\frac{1}{3}} (2t + 1)e^{-3x} dx$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -3 \\ t + 1 & \text{si } t \in [-3; 0[\\ t - 1 & \text{si } t \in [0; 3] \\ 0 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

2. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 7]$:

- g est périodique de période 3
- $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0, 2[$
- $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$

3. Calculer l'intégrale $J_3 = \int_{-1}^4 |x^2 - 1| dx$

Exercice 4

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :

$$(a) K_1 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3 + t^2 + 2} dt$$

$$(b) K_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$$

$$(c) K_3 = \int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 11x + 30} dx$$

2. Calculer la valeur de K_3

Exercice 5

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2} dx = \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{3(x+1)} \times (1+x)e^x dx$$

2. En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2} dx$.