

TP6 : Sommes de suites - Méthode de Riemann

1 Représentation graphique

On souhaite tracer des courbes grâce aux outils de visualisation disponible en Python.

L'instruction `plot()`, disponible dans la bibliothèque `pylab`, permet de tracer des courbes qui relient des points dont les abscisses et ordonnées sont fournies dans des tableaux.

Imaginons que l'on souhaite représenter la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Pour cela, on se donne un vecteur X correspondant à une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ (par exemple, $X = \text{inspace}(a, b, 100)$) puis on calcule le vecteur image $Y = f(X)$ (Y est un vecteur de même taille que X et qui contient les images par f de chacune des coordonnées du vecteur X). La commande `plot` permet ensuite de visualiser la fonction : elle relie les points de coordonnées $(X(i), Y(i))$.

Exercice 1

1. Recopiez puis exécutez le programme suivant. Qu'observez-vous ?

```
from pylab import *
figure(1)
X1=arange(0,pi,1)
Y1=sin(X1)
plot(X1,Y1,'rs-',label='dx=1')

X2=arange(0,pi,0.5)
Y2=sin(X2)
plot(X2,Y2,'g^-', linewidth=3,label='dx=0.5')
legend()
title('figure 2')

figure(2)
X3=arange(0,pi,0.2)
Y3=sin(X3)
plot(X3,Y3,marker='*',label='dx=0.2')
legend()
title('figure 2')
```

2. À quoi correspondent `dx`, `label`, `linewidth` et `marker` ?

- Style de ligne

Les chaînes de caractères suivantes permettent de définir le style de ligne :

Chaîne	Effet
-	ligne continue
--	tirets
:	ligne en pointillé
-. ,	tirets points

- Symbole (« marker »)

Les chaînes de caractères suivantes permettent de définir le symbole (« marker ») :

Chaîne	Effet
.	point marker
,	pixel marker
o	circle marker
v	triangle_down marker
^	triangle_up marker
<	triangle_left marker
>	triangle_right marker
1	tri_down marker
2	tri_up marker
3	tri_left marker
4	tri_right marker
s	square marker
p	pentagon marker
*	star marker
h	hexagon1 marker
H	hexagon2 marker
+	plus marker
x	x marker
D	diamond marker
d	thin_diamond marker

- Couleur

Les chaînes de caractères suivantes permettent de définir la couleur :

Chaîne	Couleur en anglais	Couleur en français
b	blue	bleu
g	green	vert
r	red	rouge
c	cyan	cyan
m	magenta	magenta
y	yellow	jaune
k	black	noir
w	white	blanc

Exercice 2

1. Tracer sur la même figure :
 - la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$, sur l'intervalle $[-2, 1]$, en rouge et en pointillés
 - la fonction $g(x) = \cos(\pi x)$, sur l'intervalle $[-2, 2]$, en vert et en trait plein
2. (★) Tracer sur la même figure, sur l'intervalle $[0, 2]$, les fonctions :

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi x) \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

On prendra soin d'utiliser une précision suffisante !

2 Comportement asymptotique de sommes de suites

Exercice 3

On souhaite observer le comportement asymptotique de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, appelée « *série harmonique* ».

1. Écrire un script qui
 - initialise une variable n (à 50 par exemple),
 - construit un vecteur X de taille n qui prend les valeurs entières de 1 à n ,
 - initialise un vecteur S de taille n dont toutes les valeurs sont nulles,
 - enregistre dans le vecteur S les valeurs successives de la série harmonique.
Indications : On a $S[k] = S[k-1] + \frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à $n-1$.
 - trace la courbe définie par (X, S) .
2. Sur le même graphique, ajouter la courbe de la fonction $f(x) = \ln(x) + 0.577$. (en python, $\ln$ s'écrit `log`).
3. Faites varier la valeur de n . Qu'observe-t-on ?
4. Pour quelle valeur de n , la somme vaut-elle plus de 10 ? plus de 16 ?

Exercice 4

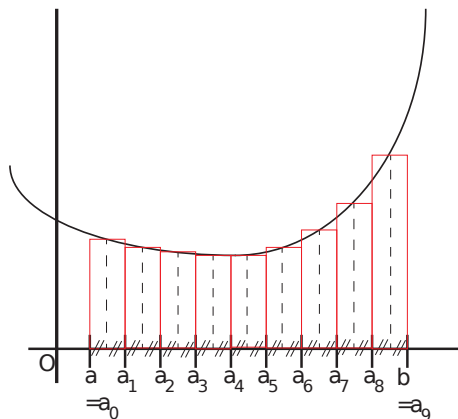
On souhaite observer le comportement asymptotique de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

1. Écrire un script qui
 - initialise une variable n (à 50 par exemple),
 - construit un vecteur X de taille n qui prend les valeurs entières de 1 à n ,
 - initialise un vecteur S de taille n dont toutes les valeurs sont nulles,
 - construit un vecteur S de taille n qui prend les valeurs successives de la somme des inverses des carrés : $S[k] = S[k-1] + \frac{1}{k^2}$
 - trace sur un graphique la courbe définie par (X, S) .
2. Faites varier la valeur de n . La somme semble-t-elle converger ou diverger ?
3. Sur le même graphique, tracer la droite d'équation $y = \frac{\pi^2}{6}$. Que peut-on en déduire ?

3 Intégrale : méthode de Riemann

But : On cherche une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx$

Principe de la méthode des rectangles : on approche la fonction f par une fonction en escalier f_{rect} . L'intégrale de la fonction f_{rect} est facilement calculable car il s'agit simplement de calculer l'aire de l'ensemble des rectangles ainsi formés.



On admet alors que $\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b f_{rect}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \times f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$.

Les différentes étapes :

1. On initialise n : le nombre de rectangle.
2. On calcule la valeur de l : la largeur d'un rectangle (tous les rectangles sont de même largeur).
3. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ de même longueur où : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.
4. Pour chaque k allant de 0 à $n - 1$, on calcule la hauteur de k -ième rectangle $h_k = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$ (soit la valeur de f pour le milieu de l'intervalle).
5. On en déduit l'aire du k -ème rectangle.
6. On cumule les aires des n rectangles pour obtenir l'approximation de l'aire sous la courbe.

Exercice 5

1. (a) Écrire une fonction nommée **carre** qui permet de calculer les valeurs de la fonction $f(x) = x^2$.
(b) A l'aide de la fonction **carre** précédente, tracer la fonction $y = x^2$ sur l'intervalle $[-2, 1]$
2. Écrire une fonction nommée **Riemann** qui prend en entrée un entier n et deux réels a et b ; et qui renvoie la valeur approchée de $\int_a^b x^2 dx$ par la méthode des rectangles avec n rectangles.
Remarque : on peut aussi mettre f , la fonction à intégrer, en argument d'entrée!
3. Tester la fonction **Riemann** pour l'intégrale $\int_{-2}^1 x^2 dx$ avec $n = 100$, puis $n = 1000$. Comparer le résultat avec la valeur exacte de l'intégrale.
4. Tester votre fonction **Riemann** pour calculer d'autres intégrales.

4 Exercices complémentaires

Exercice 6

On souhaite comparer les comportements asymptotiques des sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

1. Écrire un script qui
 - initialise une variable n (à 50 par exemple),
 - construit un vecteur X de taille n qui prend les valeurs entières de 1 à n ,
 - construit un vecteur S de taille n qui prend les valeurs successives de la somme S_n ,
 - construit un vecteur T de taille n qui prend les valeurs successives de la somme T_n ,
 - trace sur deux graphiques les courbes définies par (X, S) et (X, T) .
2. Faites varier la valeur de n . Les deux sommes ont-elles le même comportement ?

Exercice 7 (★)

On souhaite observer le comportement asymptotique de la suite suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^n A^k \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 . Plus généralement, que vaut A^k avec $k \in \mathbb{N}$?
2. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de S_n .
3. Utiliser la fonction pour calculer la somme pour $n = 100$. Ce résultat était-il prévisible ?