Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 29 septembre 2017 - Durée : 1h30
Correction

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Questions de cours :

1. Énoncer l'identité de Parseval.
2. Montrer que, si $g(t) = f(t-\tau)$ alors $c_n(g) = e^{-in\omega\tau}c_n(f)$.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. Sans faire de changement de variable :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\
&= \int_0^\pi -\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\
&= [-\arctan(\cos(x))]_0^\pi \\
&= -\arctan(\cos(\pi)) + \arctan(\cos(0)) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

2. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 (1-t)\sin(n\pi t)dt \\
&= \left[(1-t)\times\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)dt \\
&= \frac{1}{n\pi} - \left[\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

3. On linéarise la fonction :

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\pi} \cos(t)\sin(3t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(4t)+\sin(2t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos(4\pi)-\frac{1}{2}\cos(2\pi)+\frac{1}{4}\cos(0)+\frac{1}{2}\cos(0)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. On commence par faire une décomposition en éléments simples de la fonction

$$f(x)=\frac{2x^3+5x^2}{2x^2+3x-2}$$

Après une division euclidienne on obtient :

$$f(x)=x+1+\frac{-x+2}{2x^2+3x-2}$$

Or $2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$. Donc

$$f(x)=x+1+\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-1}$$

Enfin, on calcule les valeurs de a et b et on obtient

$$f(x)=x+1-\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{3}{5}\frac{1}{2x-1}$$

On peut maintenant calculer aisément l'intégrale L :

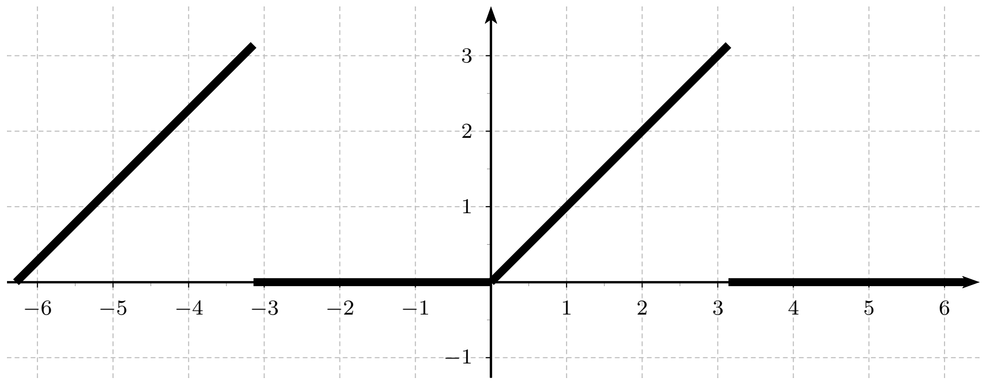
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{10}\ln|2x-1|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}+1-\frac{4}{5}\ln 3+\frac{3}{5}\ln 1+\frac{4}{5}\ln 2-\frac{3}{10}\ln 1 \\
&= \frac{3}{2}-\frac{4}{5}\ln 3+\frac{4}{5}\ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0;2\pi[$ par

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad t\in[0;\pi] \\ 0 & \text{si} \quad t\in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

   (a) Représenter f sur $[-2\pi;2\pi]$.



(b) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
La fonction n'est ni paire ni impaire. Il faut calculer a_0, a_n et b_n.
Pour a_0 on calcule l'aire d'un triangle :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi \times \pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour a_n et b_n il faut faire une intégration par parties. On peut restreindre le calcul à l'intervalle $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

et

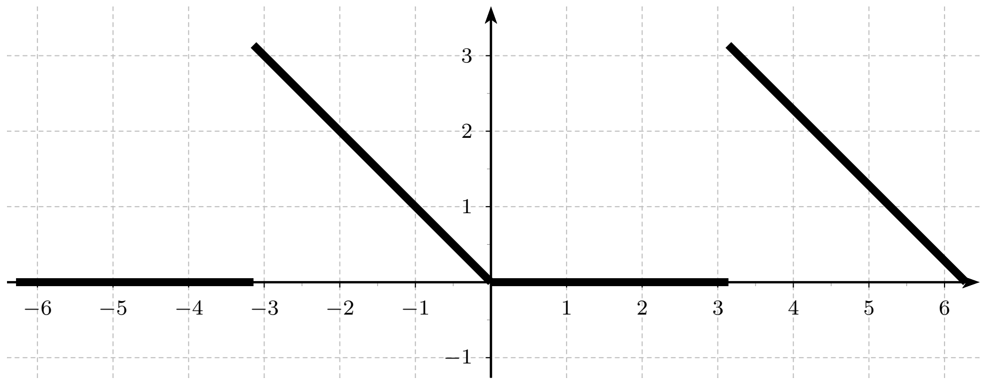
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{-1}{n}(-1)^n
\end{aligned}$$

(c) Écrire la série de Fourier de f

$$S_f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nt) - \frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$$

2. On considère la fonction périodique définie par $g(t) = f(-t)$.

(a) Représenter g sur $[-2\pi; 2\pi]$.



(b) Sans calculer ses coefficients, écrire la série de Fourier de g

On a $S_g(t) = S_f(-t)$, donc

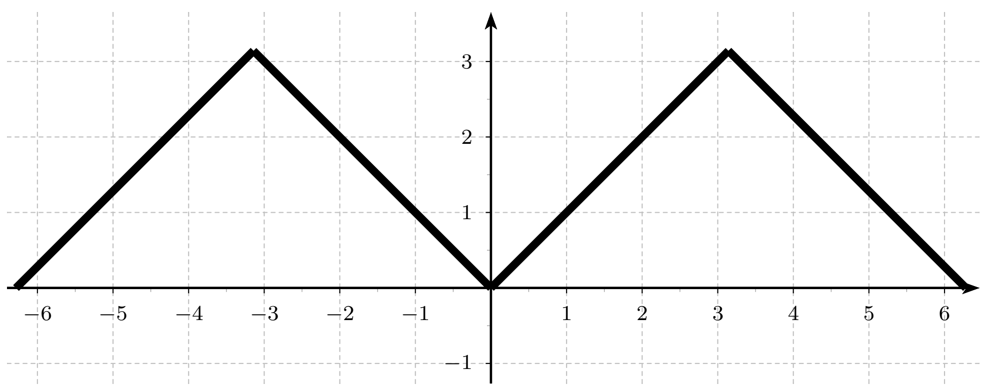
$$S_g(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(-nt) - \frac{(-1)^n}{n}\sin(-nt)$$

Donc

$$S_g(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nt) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$$

3. On considère la fonction périodique définie par $h(t) = g(t) + f(t)$.

(a) Représenter h sur $[-2\pi; 2\pi]$.



(b) Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nt)$$

La série de Fourier de h s'obtient en additionnant les séries de Fourier de f et de g

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) = 2a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n(f)\cos(nt)$$

Les $b_n(h)$ sont nuls car $b_n(f) = -b_n(g)$ (et aussi parce que h est paire !).
Donc, on obtient bien

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nt)$$

(c) En remplaçant t par 0 dans l'expression de Fourier de h, déterminer la valeur de la limite de la série convergente suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

On pose $t = 0$, on a $S_h(0) = h(0) = 0$ et

$$S_h(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(0)$$

Donc

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

Donc

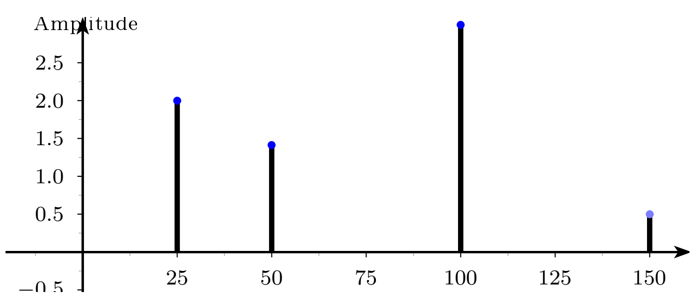
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes

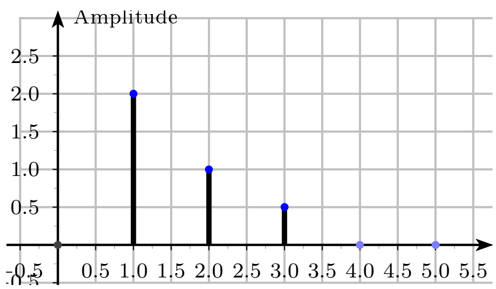
1. Soit le signal suivant :

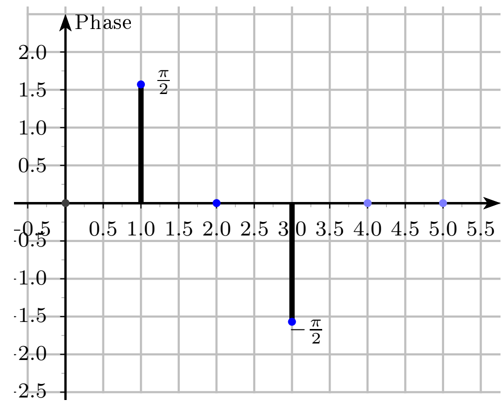
$$f(t) = 2\cos(50\pi t) - \cos(100\pi t) + \sin(100\pi t) - 3\sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

Tracer le spectre d'amplitude du signal.
Il suffit de calculer les amplitudes de chaque harmonique.
Pour la fréquence $25Hz$ on a $A_1 = 2$.
Pour la fréquence $50Hz$ on a $A_2 = \sqrt{2}$.
Pour la fréquence $100Hz$ on a $A_3 = 3$.
Pour la fréquence $150Hz$ on a $A_4 = \frac{1}{2}$.
On obtient le spectre d'amplitudes suivant :



2. On considère les spectres d'amplitudes et de phases (par rapport au cosinus), tracé en fonction des pulsations, suivants :





Donner un exemple de fonction dont les spectres correspondent aux spectres ci-dessus.
On peut donner comme exemple de fonction

$$f(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2t) + \frac{1}{2}\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Déterminer une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier vérifient :

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 2 \qquad b_1 = -1 \qquad a_3 = 4$$

On peut donner comme exemple de fonction

$$f(t) = 2 + 2\cos(t) - \sin(t) + 4\cos(3t)$$

4. On connaît les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi n} \times e^{in\frac{\pi}{2}}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
On sait que $a_n = 2\mathfrak{Re}(c_n)$ et $b_n = -2\mathfrak{Im}(c_n)$. On écrit donc c_n sous forme algébrique puis on identifie

$$c_n = -\frac{i}{2n\pi}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Donc

$$c_n = \frac{1}{2n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - i \times \frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

5. On considère une fonction périodique dont la série de Fourier est

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1+2n^2)}\cos(nt)$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f')$ et $b_n(f')$ de la dérivée de f.
On identifie les coefficients de Fourier de f dans la série de Fourier :

$$a_n(f) = \frac{4}{\pi(1+2n^2)} \qquad \text{et } b_n(f) = 0$$

Il suffit ensuite d'utiliser les formules du cours : $a_n(f') = n\omega b_n(f)$ et $b_n(f') = -n\omega a_n(f)$.
On obtient

$$a_n(f') = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f') = -n \times 1 \times \frac{4}{\pi(1+2n^2)}$$