Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 28 septembre 2018 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Question de cours : Soit f une fonction périodique de période T. Donner l'expression des coefficients de Fourier exponentiels de f.

Exercice 1 Soit f la fonction paire et périodique de période 2π telle que

$$f(t) = t^2 \text{ pour t } \in [0, \pi]$$

1. Représenter f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$.
2. Calculer la valeur moyenne $a_0(f)$ du signal f.

   La fonction f est paire donc :

$$a_0(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi t^2 dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

3. (a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f')$ et $b_n(f')$ de f'.

   Pour $t \in]0, \pi[$, on a $f'(t) = 2t$. La fonction f' est impaire et 2π-périodique, on en déduit que $a_n(f') = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$b_n(f') = \frac{4}{2\pi}\int_0^\pi 2t\sin(nt)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi t\sin(nt)dt$$

   on effectue une IPP :

$$b_n(f') = \frac{4}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(nt)}{n}dt\right) = \frac{-4(-1)^n}{n}$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que $a_n(f) = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $b_n(f)$?

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours, on a puisque la fonction f est continue est $\mathcal{C}^1$ par morceaux :

$$a_n(f') = nb_n(f) \text{ et } b_n(f') = -na_n(f)$$

   d'où $b_n(f) = 0$ et

$$a_n(f) = -\frac{1}{n} \times \frac{-4(-1)^n}{n} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

4. Déterminer la série de Fourier de f, notée $S_f(t)$.

$$S_f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

5. (a) Enoncer le théorème de Dirichlet.

Soit f une fonction T-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

(b) Monter que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On applique le Théorème de Dirichlet au point $t = \pi$, en remarquant que $\cos(n\pi) = (-1)^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \pi^2 \\ \Leftrightarrow 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

6. (a) Enoncer le théorème de Bessel-Parseval.

Soit f une fonction T-périodique et continue par morceaux. Alors :

$$\frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2$$

(b) Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

D'après le théorème de Parseval, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} &= \frac{\pi^4}{5} \\ \Leftrightarrow 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$$

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Tracer le spectre de phase et le spectre d'amplitude du signal suivant :

$$s(t) = 1 - 2\cos(100\pi t) + \sqrt{3}\cos(200\pi t) + \sin(200\pi t) + 4\sin(300\pi t)$$

   D'après le cours, on a :
   - $-2\cos(100\pi t) = 2\cos(100\pi t - \pi)$
   - $\sqrt{3}\cos(200\pi t) + \sin(200\pi t) = 2\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$
   - $4\sin(300\pi t) = 4\cos\left(300\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

2. On connait les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :

$$c_n(f) = \frac{e-1}{1-2in\pi} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

   Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

   D'après le cours, on a : $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$, d'où

$$a_n = (e-1)\left(\frac{1}{1-2in\pi} + \frac{1}{1+2in\pi}\right) = \frac{2(e-1)}{1+4n^2\pi^2}$$

   et

$$b_n = i(e-1)\left(\frac{1}{1-2in\pi} - \frac{1}{1+2in\pi}\right) = \frac{-4n\pi(e-1)}{1+4n^2\pi^2}$$

3. Soit f la fonction périodique de période 2π et impaire tel que $f(t) = t$ pour $t \in]0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

   (a) Représenter f sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$.

   (b) On admet que $a_0(f) = 0$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction g périodique de période 2π telle que $g(t) = t - \pi$ pour $t \in]0, 2\pi[$ et $g(2\pi) = 0$.

   D'après le cours, on a : $a_n(f) = 2\mathcal{R}e(c_n(f))$ et $b_n = -2\mathcal{I}m(c_n(f))$, d'où

$$c_n(f) = -\frac{i(-1)^{n+1}}{n}$$

   On remarque que $g(t) : f(t-\pi)$ d'où

$$c_n(g) = e^{-in\pi}c_n(f) = (-1)^n \times \left(-\frac{i(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{i}{n}$$

   car $e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi) = (-1)^n$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)(1-\cos^2(x))dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)dx$$
$$= [-\cos(x)]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

2. $J = \int_1^2 x\ln(x)dx$

   On effectue une IPP

$$J = \int_1^2 x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

3. $K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2\sin^5(t)dt$

   Le fonction $f(t) = t^2\sin^5(t)$ est impaire. On intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0, d'où $K = 0$.

4. $L = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx$

   On a $\frac{x+1}{(x^2+2x)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ d'où

$$L = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^2 = \frac{5}{48}$$

5. $M = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx$ (on pourra poser $u = \sin(x)$)

   On a $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$ d'où

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} u^2(1-u^2)du = \int_0^1 u^2 - u^4du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

6. $N = \int_1^e \frac{2y^6+3}{y^5+7}dz$

   La variable d'intégration est z donc $\frac{2y^6+3}{y^5+7}$ est une constante, d'où

$$N = \int_1^e \frac{2y^6+3}{y^5+7}dz = \frac{2y^6+3}{y^5+7}\int_1^e dz = (e-1)\frac{2y^6+3}{y^5+7}$$