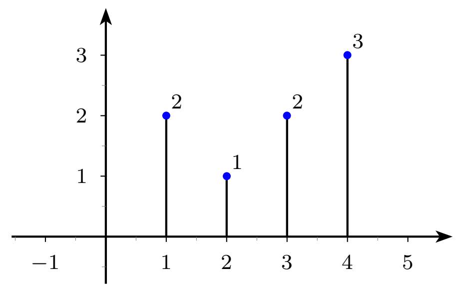
Mathématiques - Devoir Surveillé n°2
Vendredi 14 novembre 2014 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Pour chaque question, dire quel est le résultat exact **en justifiant.**

1. Soit f une fonction périodique de valeur moyenne égale à 1 et dont le spectre d'amplitude est donné par le graphe suivant.



L'énergie moyenne de f, définie par $E(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{[T]} (f(t))^2 dt$, vaut 10 (réponse c).
Pour calculer l'énergie moyenne on utilise l'identité de Parseval :

$$E(f) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = 1^2 + \frac{1}{2}\left(2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 10$$

2. Soit f une fonction périodique dont la série de Fourier est $S_f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{4n^2}\cos(nt)$.
Une approximation de l'énergie moyenne de f est $4,12$ (réponse c).
On utilise à nouveau l'identité de Parseval :

$$E(f) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = 4 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_3^2 + ...\right) = 4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{648} + ... = 4 + 0,125 + 0,0015 + ... \simeq 4,12$$

Par ailleurs on pouvait facilement éliminer les réponses a et d car l'énergie moyenne est toujours plus grande que le carré de la valeur moyenne et parce qu'elle est positive.

Exercice 2 Calculer $f \star g$

1. $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = t\mathcal{U}(t)$. Pour t positif on a

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_0^t x(t-x)dx \\ &= \int_0^t -x^2 + txdx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}tx^2\right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^3 \\ &= \frac{1}{6}t^3 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour t négatif, le produit de convolution est nul. Donc

$$f \star g(t) = \frac{1}{6}t^3\mathcal{U}(t)$$

2. $f(t) = \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$ et $g(t) = \cos(t)$. La fonction f est non nulle entre 0 et 1, donc

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_0^1 \cos(t-x)dx \\ &= [-\sin(t-x)]_0^1 \\ &= -\sin(t-1) + \sin(t) \end{aligned}$$

3. $f(t) = \Pi(t)$ et $g(t) = t\Pi(t)$. La fonction f est non nulle entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t-x)\Pi(t-x)dx \end{aligned}$$

Il faut maintenant étudier la position de la porte $x \mapsto \Pi(t-x)$ par rapport à l'intervale $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

<u>Cas 1</u> si $t + \dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t < -1$, alors

$$f \star g(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0dx = 0$$

<u>Cas 2</u> si $-\dfrac{1}{2} < t + \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < t < 0$, alors

$$\begin{aligned}
f \star g(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (t-x)dx \\
&= \left[tx - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\
&= t(t+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 \\
&= \frac{t^2+t}{2}
\end{aligned}$$

<u>Cas 3</u> si $-\dfrac{1}{2} < t - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < t < 1$, alors

$$\begin{aligned}
f \star g(t) &= \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t-x)dx \\
&= \left[tx - \frac{1}{2}x^2 \right]_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 - t(t-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})^2 \\
&= \frac{-t^2+t}{2}
\end{aligned}$$

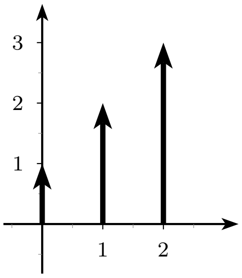
<u>Cas 4</u> si $\dfrac{1}{2} < t - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t > 1$, alors

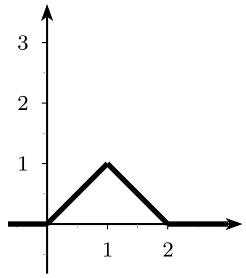
$$f \star g(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0dx = 0$$

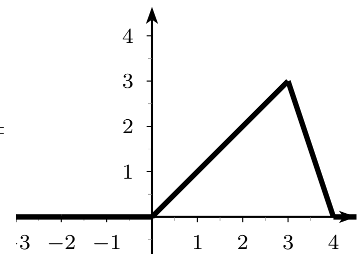
En conclusion :

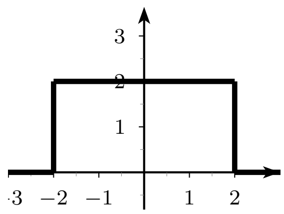
$$f \star g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \dfrac{t^2+t}{2} & \text{si } t \in [-1;0] \\ \dfrac{-t^2+t}{2} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

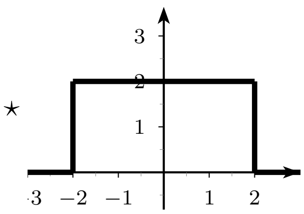
Exercice 3 Pour chaque couple de signaux, tracer sur votre copie sur un dessin propre et précis la courbe du produit de convolution **sans justifier !**

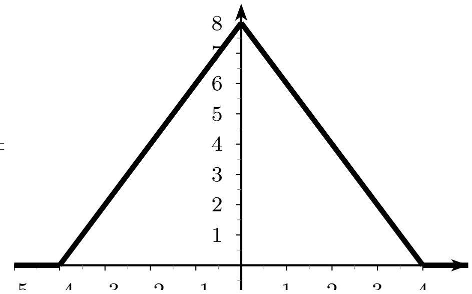
1. 

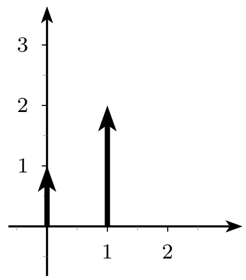
$\star$ 

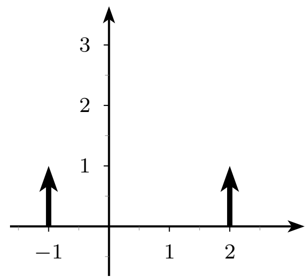
$=$ 

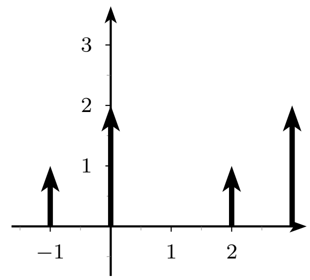
2. 

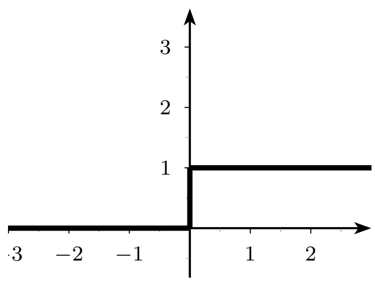
⋆ 

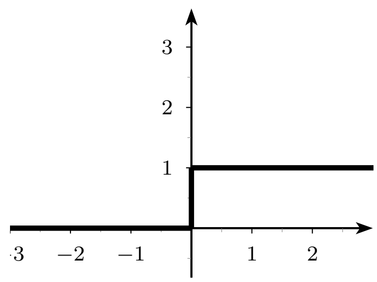
= 

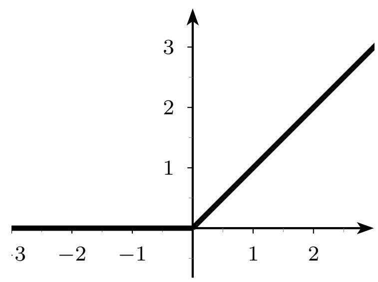
3. 

⋆ 

= 

4. 

⋆ 

= 

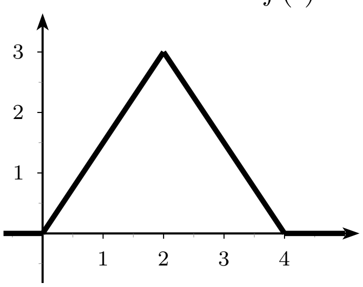
Exercice 4 Soit le signal $f(t) = t\Pi(t)$.

1. La fonction est impaire donc la transformée de Fourier est imaginaire pure.
2. Pour calculer la transformée de Fourier de f on passe par la définition et on procède par intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\Pi(t)e^{-2i\pi st}dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{-2i\pi st}dt \\
&= \left[t \times \frac{-1}{2i\pi s}e^{-2i\pi st}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{2i\pi s}e^{-2i\pi st}dt \\
&= \frac{-1}{4i\pi s}e^{-i\pi s} - \frac{1}{4i\pi s}e^{i\pi s} + \frac{1}{2i\pi s}\left[\frac{-1}{2i\pi s}e^{-2i\pi st}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{4i\pi s} \times \left(e^{-i\pi s} + e^{i\pi s}\right) - \frac{1}{(2i\pi s)^2} \times \left(e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}\right) \\
&= \frac{i}{2\pi s} \times \left(\frac{e^{-i\pi s} + e^{i\pi s}}{2}\right) + \frac{i}{2\pi^2 s^2} \times \left(\frac{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}}{2i}\right) \\
&= \frac{i}{2\pi s}\cos(\pi s) - \frac{i}{2\pi^2 s^2}\sin(\pi s) \\
&= i\left(\frac{\cos(\pi s)}{2\pi s} - \frac{\sin(\pi s)}{2\pi^2 s^2}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 5 Calculer les transformées de Fourier des signaux suivants.

1. $f(t) = \Pi\left(\dfrac{t}{2} - 1\right)$. On sait que la transformée de Fourier de la porte est $\mathcal{F}_\Pi(s) = \dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s}$.
   Donc $\mathcal{F}_{\Pi(t-1)}(s) = e^{-2i\pi s}\dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s}$.
   Donc $\mathcal{F}_{\Pi(\frac{1}{2}t-1)}(s) = 2\mathcal{F}_{\Pi(t-1)}(2s) = 2e^{-4i\pi s}\dfrac{\sin(2\pi s)}{2\pi s} = e^{-4i\pi s}\dfrac{\sin(2\pi s)}{\pi s}$.
2. $f(t) = e^{-|t+2|} = f_0(t+2)$ avec $f_0(t) = e^{-|t|}$.
   Or la transformée de Fourier de f_0 est $\mathcal{F}_0(s) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 s^2}$.
   Donc $\mathcal{F}(s) = e^{-2i\pi sa}\mathcal{F}_0(s)$ avec $a = -2$.
   Conclusion : $\mathcal{F}(s) = e^{4i\pi s}\dfrac{2}{1+4\pi^2 s^2}$.
3. $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} = f_0\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)$ avec $f_0(t) = e^{-\pi t^2}$.
   Or la transformée de Fourier de f_0 est $\mathcal{F}_0(s) = e^{-\pi s^2}$.
   Donc $\mathcal{F}(s) = \frac{1}{|a|}F_0\left(\frac{s}{a}\right)$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
   Conclusion : $\mathcal{F}(s) = \sqrt{2\pi}e^{-\pi(\sqrt{2\pi}s)^2} = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 s^2}$.
4. La fonction s'écrit $f(t) = 3\Lambda\left(\frac{1}{2}(t-2)\right)$.



   On sait que la transformée de Fourier du triangle est $\mathcal{F}_\Lambda(s) = \dfrac{\sin^2(\pi s)}{(\pi s)^2}$.
   Donc $\mathcal{F}_{\Lambda(\frac{1}{2}t)}(s) = 2\dfrac{\sin^2(2\pi s)}{(2\pi s)^2}$.
   Donc $\mathcal{F}_{\Lambda(\frac{1}{2}(t-2))}(s) = e^{-4i\pi s}\mathcal{F}_{\Lambda(\frac{1}{2}t)}(s) = 2e^{-4i\pi s}\dfrac{\sin^2(2\pi s)}{(2\pi s)^2}$.
   Conclusion : $\mathcal{F}(s) = 3e^{-4i\pi s}\dfrac{\sin^2(2\pi s)}{2\pi^2 s^2}$

Rappels : $\mathcal{F}_{e^{-\pi t^2}}(s) = e^{-\pi s^2}$ *et* $\mathcal{F}_{e^{-|t|}}(s) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 s^2}$