Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 22 novembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

On considère les fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter les fonctions f_1 et f_2 sur l'intervalle $[-3, 5]$.
2. Donner la définition de $f_1 * f_2(t)$
3. Déterminer les valeurs de : (on justifiera soigneusement les réponses. Le raisonnement pourra s'appuyer sur des graphiques)

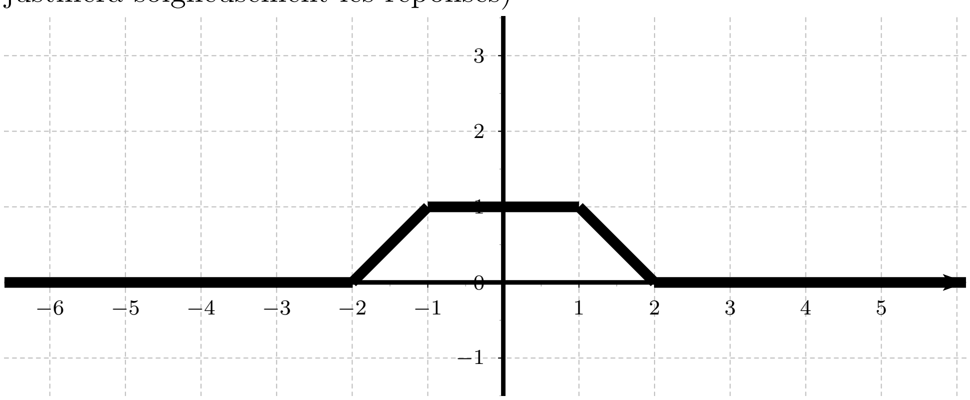
   (a) $f_1 * f_2(-2)$

   (b) $f_1 * f_2(-1/2)$

   (c) $f_1 * f_2(1)$

   (d) $f_1 * f_2(4)$

4. La fonction $f_1 * f_2(t)$ est-elle égale à la fonction représentée sur le graphique ci-dessous ? (on justifiera soigneusement les réponses)



Exercice 2 Les questions 1., 2., et 3. suivantes sont indépendantes.

1. On note $f(t) = t\mathcal{U}(t)$

   (a) Calculer $f * g_1(t)$ avec $g_1(t) = \mathcal{U}(t)$

   (b) En déduire $f * g_2(t)$ avec $g_2(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-2)$

2. On note $f(t) = \Lambda\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$ et $g(t) = \delta(t) + 2\delta(t+2) + \dfrac{1}{2}\delta(t-1)$

   (a) Représenter les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sur l'intervalle $[-4, 4]$.

(b) Représenter graphiquement $f * g(t)$

3. Calculer la dérivée de $f * g(t)$ avec $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante

$$y'' + 2y' + y = t \ (\star)$$

1. Déterminer l'équation homogène associée à $(\star)$
2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\star)$
3. Déterminer une solution particulière de $(\star)$
4. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\star)$
5. Le système
$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = t \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{array}\right.$$
admet-il une unique solution ?

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\star\star) \left\{\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = t\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

On cherche une solution causale à l'équation $(\star\star)$

1. Exprimer $\mathcal{L}_{y''}(p)$ et $\mathcal{L}_{y'}(p)$ en fonction $\mathcal{L}_y(p)$, $y(0)$ et $y'(0)$
2. Montrer que
$$\frac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p}$$
3. Déterminer la transformée de Laplace inverse de $\dfrac{1}{p^2(p^2 + 2p + 1)}$.
4. En déduire la valeur de $f * g(t)$ avec $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = te^{-t}\mathcal{U}(t)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de l'exercice 2 ?
5. Résoudre $(\star\star)$ en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 5 Soit

$$f(t) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$$

Calculer la transformée de Fourier de $f(t)$