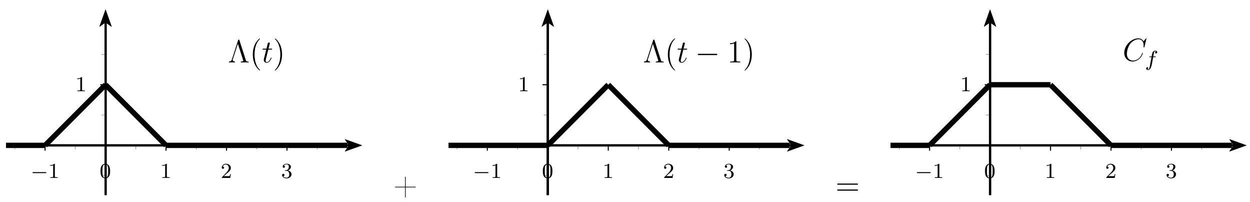
Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Correction
Vendredi 26 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

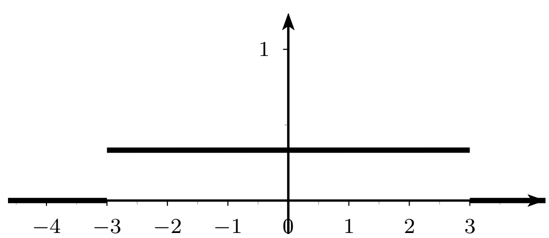
Exercice 1 Tracer la représentation graphique des signaux suivants :

1. $f(t) = \Lambda(t-1) + \Lambda(t)$



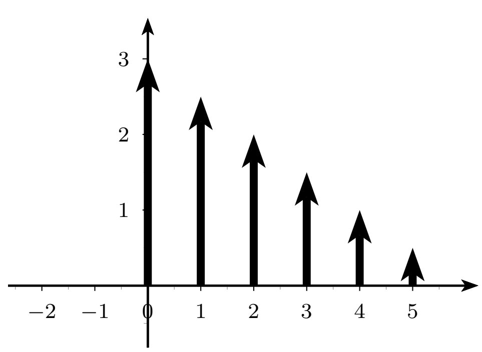
2. $g(t) = \frac{1}{\epsilon}\Pi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ avec $\epsilon = 3$.

   La fonction g est une porte de support $]-3;3[$ et de hauteur $\frac{1}{3}$:



3. $h(t) = \sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{2}t+3\right)\delta(t-k)$.

   On échantillonne la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}t + 3$ pour les valeurs entières de t allant de 0 à 5 :



Exercice 2

1. Calculer les produits de convolutions de f par g

(a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = (2t-1)\mathcal{U}(t)$
Les deux foncitons sont causales donc :

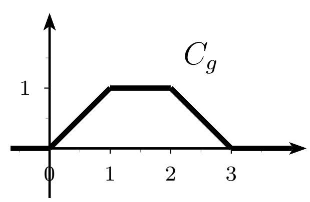
$$\begin{aligned}
f \star g(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \int_0^t x^2(2(t-x)-1)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \int_0^t 2tx^2 - 2x^3 - x^2dx\mathcal{U}(t) \\
&= \left[\frac{2}{3}tx^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^t \mathcal{U}(t) \\
&= \left(\frac{2}{3}t^4 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right)\mathcal{U}(t)
\end{aligned}$$

(b) $f(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = t\mathcal{U}(t)$
Les deux foncitons sont causales, on calcule donc l'intégrale suivante (en faisant une intégration par parties) :

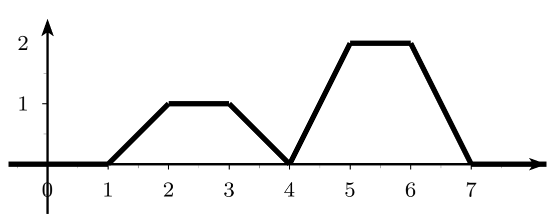
$$\begin{aligned}
f \star g(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \int_0^t \cos(2x)(t-x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\left[\frac{1}{2}\sin(2x)(t-x)\right]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{2}\sin(2x)dx\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\left[\frac{1}{2}\sin(2x)(t-x)\right]_0^t + \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^t\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\cos(2t)+1\right)\mathcal{U}(t)
\end{aligned}$$

2. Tracer les produits de convolutions de f par g sans justifier :

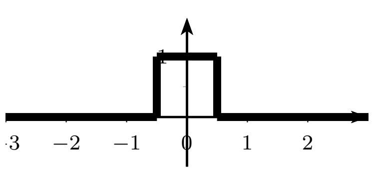
(a) $f(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-4)$ et la courbe de g est :



La courbe de $f \star g$ est

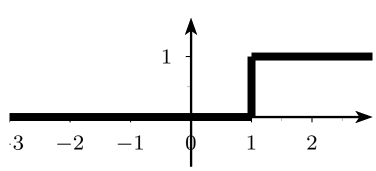


(b)



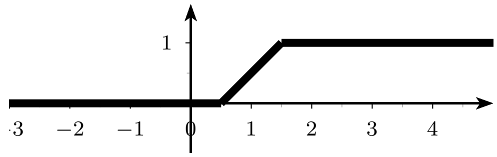
$f(t) = \Pi(t)$

et



$g(t) = \mathcal{U}(t-1)$

La courbe de $f \star g$ est



3. Soit $F(p) = \dfrac{4}{p(p-2)^2}$ la transformée de Laplace d'une fonction f.

   (a) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions $F_1(p) = \dfrac{1}{p}$ et $F_2(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2}$ (on pourra utiliser le formulaire en fin de sujet !).
   La transformée de Laplace inverse de F_1 est $f_1(t) = \mathcal{U}(t)$.
   La transformée de Laplace inverse de F_2 est $f_2(t) = te^{2t}\mathcal{U}(t)$.

   (b) En décomposant F comme un produit de 2 transformées de Laplace, déterminer f.
   Comme $F(p) = F_1(p) \times F_2(p)$ alors la transformée inverse de F est $f(t) = f_1 \star f_2(t)$. Donc

$$\begin{aligned}
f_2 \star f_1(t) &= \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx\mathcal{U}(t) \\
&= \int_0^t xe^{2x}dx\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2}e^{2x}dx\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^t - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^t\right)\mathcal{U}(t) \\
&= \left(\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}\right)\mathcal{U}(t)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (a) $(E_1) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = -3e^{3t}$
   On résout l'équation homogène associée : $(E_0) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.
   L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ a pour racine double $r_0 = 2$.
   Donc les solutions de (E_0) sont de la forme : $y_0(t) = (At+B)e^{2t}, \quad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$.

   On cherche une solution particulière : on pose $y_p(t) = ae^{3t}$, et donc $y_p'(t) = 3ae^{3t}$ et $y_p''(t) = 9ae^{3t}$. Ainsi, y_p est solution de (E_1) si et seulement si

$$9ae^{3t} - 4 \times 3ae^{3t} + 4 \times ae^{3t} = -3e^{3t} \Leftrightarrow a = -3$$

   Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = (At+B)e^{2t} - 3e^{3t} \qquad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

   (b) $(E_2) : y''(t) = -3e^{3t}$.
   Pour trouver les solutions de (E_2) il suffit d'intégrer 2 fois :

$$y''(t) = -3e^{3t} \Rightarrow y'(t) = -e^{3t} + A \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{3}e^{3t} + At + B \qquad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

(c) $(E_3) : y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0$
avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
L'équation caractéristique de (E_3) est $r^2 + 4r - 5 = 0$; les racines de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -5$. Ainsi, les solutions de (E_3) sont de la forme

$$y(t) = Ae^t + Be^{-5t} \qquad \forall (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Calculons A et B :

$$y(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$$

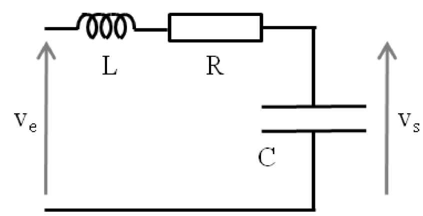
et

$$y'(0) = 1 \Rightarrow A - 5B = 1$$

On en déduit que $A = 1$ et $B = 0$. L'unique solution est donc $y(t) = e^t$.

2. Donner une équation différentielle d'ordre 2, homogène, qui admette la fonction $y(t) = e^{-2t}(\cos(3t) + 2\sin(3t))$ comme solution.
On cherche une équation différentielle d'ordre 2 linéaire à coefficients constants et homogène :
On doit alors avoir une équation caractéristique ayant 2 racines complexes : $r_1 = -2+3i$ et $r_2 = \overline{r_1}$.
Donc l'équation caractéristique est $(r - r_1)(r - r_2) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 4r + 13 = 0$.
L'équation suivante répond donc à la question : $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0$

Exercice 4 On considère le circuit RLC suivant :



On suppose que la tension en entrée $V_e = E$ est constante. On suppose que $V_s(0) = 0$ et $V_s'(0) = 0$.

1. Montrer que la sortie V_s est solution de $\frac{1}{\omega_0^2}s''(t) + \frac{2m}{\omega_0}s'(t) + s(t) = E \qquad (\star)$.
où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{RC\omega_0}{2}$.
On sait que :

$$\begin{cases} V_e(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_s(t) \\ V_e(t) = E \\ i(t) = C\frac{dV_s}{dt}(t) \\ V_R(t) = Ri(t) = RC\frac{dV_s}{dt}(t) \\ V_L(t) = L\frac{di}{dt}(t) = LC\frac{d^2V_s}{dt^2}(t) \end{cases}$$

Donc V_s est solution de

$$LC\frac{d^2s}{dt^2}(t) + RC\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = E \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}s''(t) + \frac{2\frac{RC\omega_0}{2}}{\omega_0}\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = E$$

2. Déterminer le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à $(\star)$.
Le polynôme caractéristique est $\frac{1}{\omega_0^2}r^2 + \frac{2m}{\omega_0}r + 1$.

3. À quelle condition sur les paramètres m et ω_0, le polynôme caractéristique admet-il deux racines réelles ? Donner alors l'expressions des 2 racines du polynôme en fonction de m et ω_0 (on les notera r_1 et r_2 pour la suite).
   On calcule le discriminant du polynôme caractéristique :
   $\Delta = \left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{4m^2-4}{\omega_0^2} = \frac{4(m^2-1)}{\omega_0^2}$.
   Le discriminant est positif si et seulement si $m > 1$ car m est positif. Les deux racines réelles sont alors :
$$r_1 = \frac{-\frac{2m}{\omega_0} - \sqrt{\frac{4(m^2-1)}{\omega_0^2}}}{2 \times \frac{1}{\omega_0^2}} = \left(-\frac{2m}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0}\sqrt{m^2-1}\right) \times \frac{\omega_0^2}{2} = \omega_0\left(-m - \sqrt{m^2-1}\right)$$
   et
$$r_2 = \omega_0\left(-m + \sqrt{m^2-1}\right)$$

4. On suppose que $m > 1$:
   (a) Donner la forme des solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$.
   Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $s_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$
   (b) Donner l'ensemble des solutions de $(\star)$.
   On peut montrer que $s_p(t) = E$ est une solution paritulière de $(\star)$. Donc les solutions de $(\star)$ sont les fonctions de la forme : $s(t) = s_h(t) + s_p(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E \quad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$
   (c) Montrer que l'unique solution de $(\star)$ est la fonction
$$s(t) = E\left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1}e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1}e^{r_2 t}\right)$$
   On utilise les conditions initiales pour calculer A et B.
$$V_s(0) = 0 \Rightarrow A + B + E = 0$$
   et, sachant que $s'(t) = Ar_1e^{r_1 t} + Br_2e^{r_2 t}$, on a
$$V_s'(0) = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0$$
   On résout le système à deux inconnues et on trouve $A = -\frac{Er_2}{r_2 - r_1}$ et $B = \frac{Er_1}{r_2 - r_1}$

5. Appliquez la transformée de Laplace à l'équation différentielle $(\star)$ puis en déduire l'expression de $S(p)$, la transformée de Laplace de $s(t)$ en fonction de E, ω_0 et m.
   On sait que $\mathcal{L}_{f'}(p) = p\mathcal{L}_f(p) - f(0)$ et que $\mathcal{L}_{f''}(p) = p\mathcal{L}_{f'}(p) - f'(0) = p\left(p\mathcal{L}_f(p) - f(0)\right) - f'(0)$.
   Donc
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_0^2}s''(t) + \frac{2m}{\omega_0}s'(t) + s(t) = E \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_0^2}\mathcal{L}_{s''}(p) + \frac{2m}{\omega_0}\mathcal{L}_{s'}(p) + \mathcal{L}_s(p) = \mathcal{L}_{EU(t)}(p) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_0^2}(p^2\mathcal{L}s(p) - ps(0) - s'(0)) + \frac{2m}{\omega_0}(p\mathcal{L}_{s'}(p) - s(0) + \mathcal{L}_s(p) = \frac{E}{p} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}s(p) \times \left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_0}p + 1\right) = \frac{E}{p} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}s(p) = \frac{E}{p\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_0}p + 1\right)}
\end{aligned}$$