Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Jeudi 14 janvier 2016 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

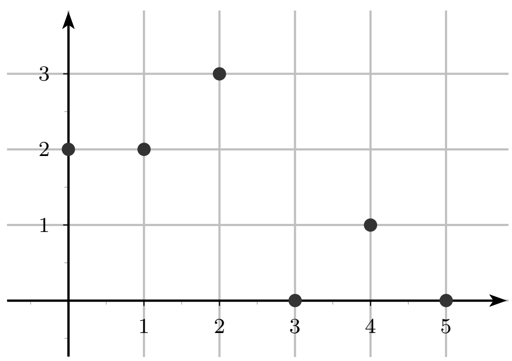
Exercice 1

Donner le domaine de convergence des transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

1. $x_1(n) = -2 \times (-3)^n \mathcal{U}(n)$,
2. $x_2(n) = \dfrac{1}{n^7}\mathcal{U}(n)$,
3. $x_3(n) = n!\mathcal{U}(n)$.

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère le signal causal $x(n)$ donné par $x(n) = 0$ pour $n \geq 6$ et :



Déterminer les transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

(a) $x_1(n) = x(n-2)$,

(b) $x_2(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$.

2. Soit $y(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $Y(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^{-3}}$.
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_3(n) = 2^n \times y(n)$.

3. Soit $w(n)$ un signal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est $W(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$.
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x_4(n) = nw(n)$

Exercice 3 Calculer la transformée inverse de :

1. $X_1(z) = \dfrac{z}{z^2+2z-3}$,
2. $X_2(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}$,
3. $X_3(z) = z^{-2} - 2z^{-3} + \dfrac{1}{2}z^{-5}$.

Exercice 4 ***Filtre IIR***
On rappelle que la discrétisation, avec une période d'échantillonage T_e, d'un filtre IIR dont la fonction de transfère est

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{jw}{\omega_0}}$$

permet d'écrire l'équation de récurrence

$$S(n) = aE(n) + bS(n-1)$$

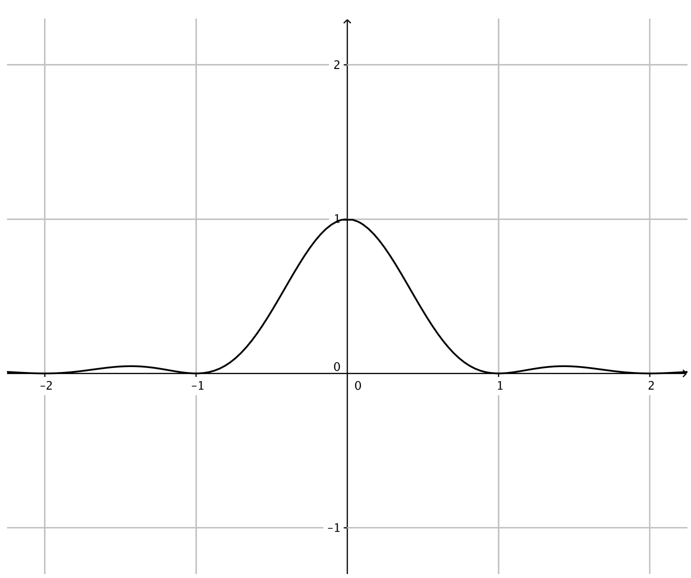
où a et b sont des constantes liées à w_0 et la fréquence d'échantillonage T_e,
et où $S(n)$ est la réponse pour un signal d'entrée $E(n)$

1. (bonus) Montrer que pour $T_e = 8kHz$ et $\omega_0 = 6000 rad.s^{-1}$ on obitent $a = \frac{3}{7}$ et $b = \frac{4}{7}$.
2. Montre que la transformée en $\mathcal{Z}$ de $S(n)$, lorsque $E(n)$ est un Dirac (réponse impulsionnelle) est
$$X(z) = a\frac{1}{1 - bZ^{-1}}$$
3. En déduire la valeur de $S(n)$ en fonction de n lorsque $E(n)$ est un Dirac (réponse impulsionnelle).
4. Déterminer par la même méthode la réponse indicielle.

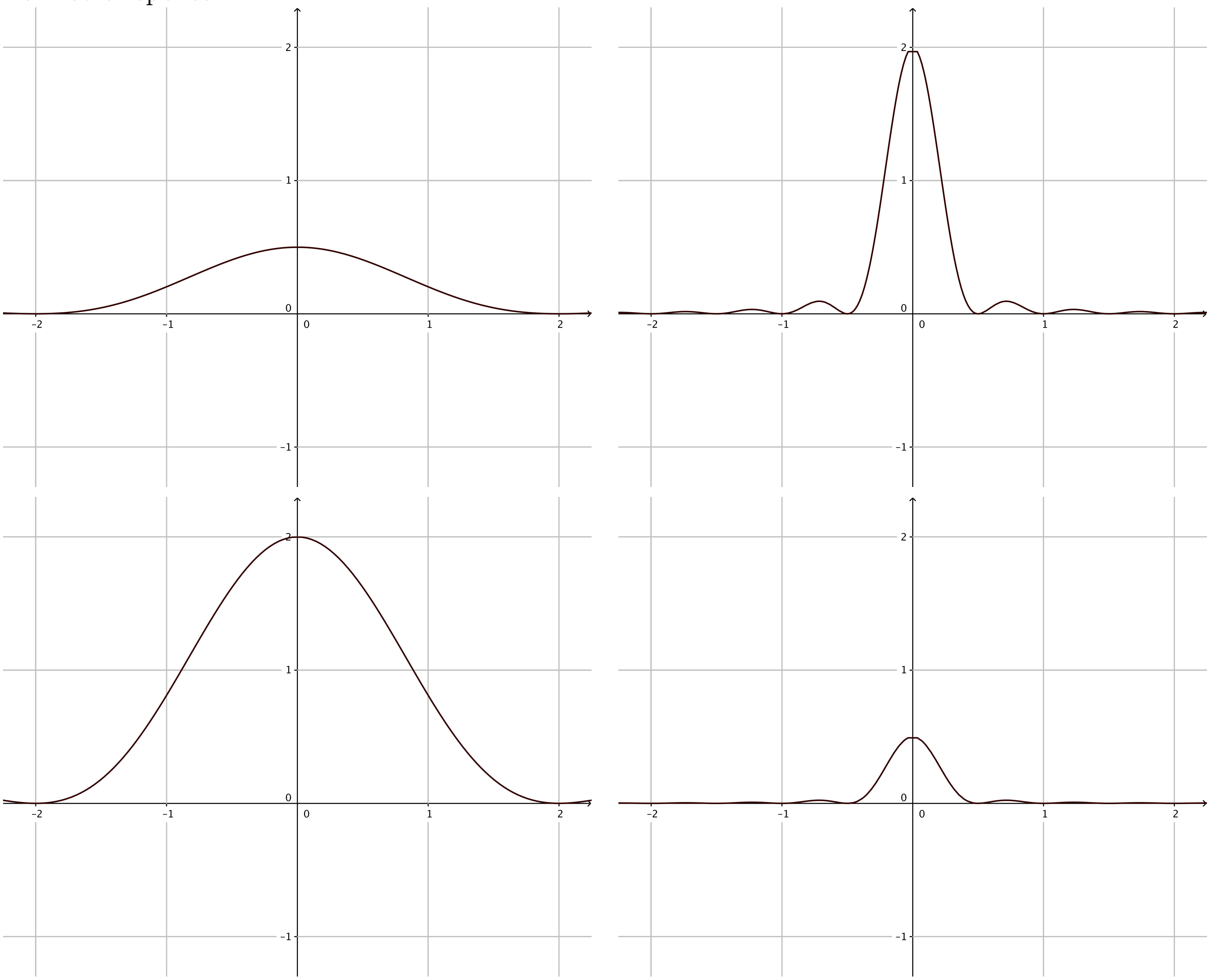
Exercice 5

1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2\pi}, \\ 0 \text{ si } \text{ sinon }. \end{cases}$
   (b) $f_2(t) = e^{-2\pi|t|}$.
2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :
   (a) $f_3(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$,
   (b) $f_4(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$.

Exercice 6 Dans le graphique ci-dessous est représenté la transformée de Fourier d'une certaine fonction f.



Quelle est la représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = f(2x)$? Justifiez votre réponse.



Exercice 7 En utilisant l'identité de Parseval, calculez l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$