Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Sujet 1
Mardi janvier 2018 - Durée : 1h15

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Toutes les questions sont indépendantes.

1. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{2n+1}$ converge t-elle ?

$$\lim_{n\to\infty} |U_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

La suite ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

2. Déterminer le domaine de convergence de la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal $x(n) = n(-2)^n\mathcal{U}(n)$

On note R le rayon de convergence.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\times(-2)}{n}\right| = 2$$

Donc le domaine de convergence est

$$D = \{z \in \mathbb{C} t.q. |z| > 2\}$$

3. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = (-2)^{-n}\mathcal{U}(n)$

Le signal est une suite géométrique : $x(n) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \mathcal{U}(n)$

Donc la transformée en $\mathcal{Z}$ est

$$X(z) = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

4. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = (2n-3)\mathcal{U}(n-2)$

On note x_0 le signal discret qui a été retardé pour obtenir x : $x(n) = x_0(n-2)$.
Donc

$$x_0(n) = x(n+2) = (2(n+2)-3)\mathcal{U}(n+2-2) = (2n+1)\mathcal{U}(n) = 2n\mathcal{U}(n) + \mathcal{U}(n)$$

Donc

$$X_0(z) = 2 \times \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1}}$$

Enfin

$$X(z) = z^{-2}X_0(z) = 2 \times \frac{z^{-3}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1}}$$

5. Remplir le formulaire ci-dessous

$x(n)$	**Transformée en $\mathcal{Z}$ de x**
$\cos(n\omega)\mathcal{U}(n)$	$\dfrac{1-\cos(w)z^{-1}}{1-2\cos(w)z^{-1}+z^{-2}}$

$x(n)$	**Transformée en $\mathcal{Z}$ de x**
$x_0(n-k)$ où $k \in \mathbb{N}$	$z^{-k}X_0(z)$

6. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de $X(z) = \dfrac{z}{(z+4)(z-1)}$

<u>méthode 1</u> : On fait la D.E.S. de $X(z)$:

$$X(z) = \frac{a}{z+4} + \frac{b}{z-1} = \frac{\frac{4}{5}}{z+4} + \frac{\frac{1}{5}}{z-1}$$

On multiplie les fractions par z^{-1} au numérateur et au dénominateur :

$$X(z) = \frac{4}{5} \times \frac{z^{-1}}{1+4z^{-1}} + \frac{1}{5} \times \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

On identifie alors la transformée en $\mathcal{Z}$ d'une suite géométrique retardée et d'un échelon retardé

$$x(n) = \left(\frac{4}{5}(-4)^{n-1} + \frac{1}{5}\right)\mathcal{U}(n-1)$$

<u>méthode 2</u> : On fait la D.E.S. de $X(z)$ après avoir mis z en facteur :

$$X(z) = z\left(\frac{a}{z+4} + \frac{b}{z-1}\right) = z\left(\frac{\frac{1}{5}}{z+4} + \frac{-\frac{1}{5}}{z-1}\right)$$

On multiplie les fractions par z^{-1} au numérateur et au dénominateur :

$$X(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+4z^{-1}} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

On identifie alors la transformée en $\mathcal{Z}$ d'une suite géométrique et d'un échelon

$$x(n) = \left(\frac{1}{5}(-4)^{n} + \frac{1}{5}\right)\mathcal{U}(n)$$

7. Démontrer que la transformée de Fourier de la fonction porte est $F(s) = \dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s}$.

On revient à la définition de la transformée de Fourier

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2i\pi st} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi st} dt$$

Il suffit de faire un calcul de primitive

$$F(s) = \left[\frac{-1}{2i\pi s} e^{-2i\pi st} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2i\pi s} e^{-i\pi s} + \frac{1}{2i\pi s} e^{i\pi s}$$

On met en facteur la fraction et on reconnaît la formule d'Euler du sinus :

$$F(s) = \frac{1}{2i\pi s} \left(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} \right) = \frac{1}{\pi s} \left(\frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2i} \right) = \frac{1}{\pi s} \sin(\pi s)$$

8. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \Pi\left(\dfrac{t}{7}\right)$

On connaît la transformée de Fourier de $\Pi(t)$, il suffit d'appliquer la propriété de dilatation pour $a = \dfrac{1}{7}$

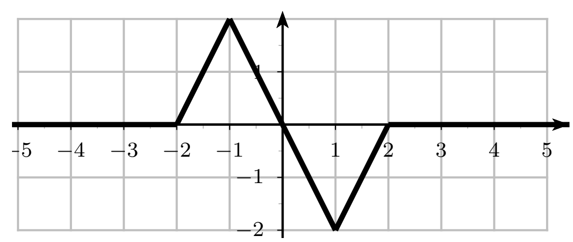
$$F(s) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}_{\Pi} \left(\frac{s}{a} \right) = 7 \times \frac{\sin(\pi \times 7s)}{\pi \times 7s} = \frac{\sin(7\pi s)}{\pi s}$$

9. Remplir le formulaire ci-dessous

$f(t)$	**Transformée de Fourier de f**
$\Lambda(t)$	$\left(\dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s} \right)^2$
$e^{-\lvert t \rvert}$	$\dfrac{2}{1 + 4\pi^2 s^2}$

$f(t)$	**Transformée de Fourier de f**
$f(t) = f_0(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a \rvert} \mathcal{F}_{f_0} \left(\dfrac{s}{a} \right)$
$f(t) = f_0(t - a)$	$\mathcal{F}_{f_0}(s) \times e^{-2i\pi s \times a}$

10. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f dont le graphe est :



On identifie que la fonction s'écrit : $f(t) = 2 \times (\Lambda(t+1) - \Lambda(t-1))$. On connaît la transformée de Fourier du triangle. IL suffit d'appliquer la formule du retard (qui est aussi valable pour une avance)

$$F(s) = 2 \times \left(\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \right)^2 \times e^{-2i\pi s \times (-1)} - 2 \times \left(\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \right)^2 \times e^{-2i\pi s \times (1)}$$

On peut simplifier l'écriture

$$F(s) = 2 \times \left(\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \right)^2 \times \left(e^{2i\pi s} - e^{-2i\pi s} \right) = 2 \left(\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \right)^2 \times 2i \sin(2\pi s)$$

11. Déterminer la transformée de Fourier inverse de $F(s) = e^{-2s^2}$. (On rappelle que la transformée de $f_0(t) = e^{-\pi t^2}$ est $F_0(s) = e^{-\pi s^2}$.)

On cherche la transformée de Fourier inverse de F : $\mathcal{F}_F^{-1}(t)$.
Cela revient à déterminer une transformée de Fourier car la fonction F est paire :

$$\mathcal{F}_F^{-1}(t) = \mathcal{F}_F(-t) = \mathcal{F}_F(t)$$

Or $F(s) = F_0\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}s\right)$ donc

$$f(t) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}} f_0\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}t\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{2}t^2}$$

12. Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4+t^2}\right)^2 dt$.

On arrange l'écriture de I pour pouvoir utiliser Parseval :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}t^2}\right)^2 dt$$

On pose le changement de variable $t = 4\pi x$:

$$I = \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+4\pi^2x^2}\right)^2 4\pi dx$$

Et enfin

$$I = \frac{1}{16} \times 4\pi \times \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\right)^2 dx$$

D'après le théorème de Parseval on a

$$I = \frac{\pi}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-|s|}\right)^2 ds$$

Par parité

$$I = \frac{\pi}{16} \times 2 \int_0^{+\infty} e^{-2s} ds = \frac{\pi}{16} \left[-\frac{1}{2}e^{-2s}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{16}$$