

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 18 janvier 2019 - Durée : 1h45

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $\frac{\sin(x)}{1+x}$.

Exercice 2

1. Soit la fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tracer le graphe de f et calculer sa transformée de Fourier $F(v)$.

2. Soit la fonction g "triangle" définie par $g(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(a) Tracer le graphe de g .

(b) Exprimer g à l'aide d'un produit de convolution. En déduire sa transformée de Fourier $G(v)$.

(c) Retrouver $G(v)$ à partir de la transformée de Fourier de f' .

Exercice 3

1. On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0. \quad (H)$$

(a) Donner la forme générale des solutions de (H) .

(b) Donner la solution de (H) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

(c) Donner la solution de (H) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y(1) = 1$.

2. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2t^2. \quad (E_1)$$

(a) Déterminer une solution particulière de (E_1) .

(b) Déterminer la forme générale des solutions de (E_1) .

(c) Déterminer la solution de (E_1) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

3. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :

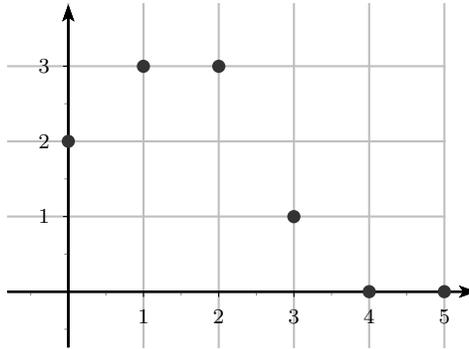
$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}. \quad (E_2)$$

(a) Déterminer une solution particulière de (E_2) .

Exercice 4

Calculer la transformée en \mathcal{Z} des signaux suivants :

1. $x_1(n) = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n-2)$
2. $x_2(n) = n(-2)^n \mathcal{U}(n)$
3. $x_3(n)$ est le signal causal donné par :



et $x(n) = 0$ pour $n \geq 6$.

Exercice 5

Calculer la transformée inverse de

1. $X_1(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)}$
2. $X_2(z) = \frac{z^{-3}}{1+z^{-1}}$
3. $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$