Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 21 janvier 2022 - Durée : 1h

Tout appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Représenter les signaux suivants et donner leur transformée de Fourier :

1. $f(t) = \Pi\left(\frac{t+4}{2}\right)$
2. $g(t) = \Lambda\left(\frac{3t}{2}\right)$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ -x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f **avec la définition**.
3. **En déduire** la transformée de Fourier de la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \frac{2^n}{3}$
2. $\sum \frac{n^2+n+3}{4n^4+2n^2+1}$
3. $\sum \frac{n^2}{n!}$
4. $\sum \left(n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n$

Exercice 4 Déterminer le domaine de convergence de la transformée en $\mathcal{Z}$: $\sum a_n z^{-n}$ dans les cas suivants (les signaux discrets (a_n) sont considérés comme causaux) :

1. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{3n}}$
3. $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 5

1. Déterminer, en justifiant, la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants :
   (a) $x_1(n) = 3^n \mathcal{U}(n-2)$
   (b) $x_2(n) = \left(\frac{n+4}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
   (c) $x_3(n) = \frac{n}{2^n}\mathcal{U}(n)$
2. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de :
   (a) $Y_1(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3}$
   (b) $Y_2(z) = \frac{1}{1+4z^{-1}}$
   (c) $Y_3(z) = \frac{z^{-1}-z^{-4}}{(1-z^{-1})^2}$