Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 13 janvier 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

   (b) $y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = t + 5$

   (c) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4 \end{cases}$

2. Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = e^t \cos(2t)$ et $y_2(t) = e^t \sin(2t)$ sont solutions.
3. La fonction $f(t) = (2t+1)e^{-4t}$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante :

$$2y''(t) + y(t) - 4y(t) = 32te^{-4t}$$

Exercice 2

1. Montrer, en utilisant la définition de la transformée de Fourier, que :

$$\mathcal{F}_\Pi(s) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} & \text{si} \quad s \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$$

   oú $\mathcal{F}_\Pi$ est la transformée de Fourier du signal porte Π.
2. Donner la transformée de Fourier des signaux suivants :

   (a) $f_1(t) = \Lambda(t-2)$

   (b) $f_2(t) = \Pi(3t)$

   (c) $f_3(t) = \Pi\left(\frac{2t+1}{4}\right)$

Exercice 3

1. Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants :

   (a) $x_1(n) = (2n+4)\mathcal{U}(n)$

   (b) $x_2(n) = \frac{1}{4^n}\mathcal{U}(n)$

   (c) $x_3(n) = x_1(n-2)$

   (d) $x_4(n) = n^2\mathcal{U}(n)$

   (e) $x_5(n) = 2^n(n-2)\mathcal{U}(n-2)$

2. Déterminer quel signal causal a comme transformée en $\mathcal{Z}$:

   (a)
   $$X_1(z) = 4 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}$$

   (b)
   $$X_2(z) = \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

Exercice 4 Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$x(n) - 3x(n-1) + 2x(n-2) = \delta(n-1)$$

1. En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ à la relation précédente, montrer que :
$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

2. En déduire que :
$$x(n) = (2^n - 1)\mathcal{U}(n)$$

Exercice 5

1. Calculer à l'aide de l'identité de Parseval l'intégrale I_1 :
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} dx$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale I_2 :
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$