Nom : Prénom : Groupe :

# Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - correction
# Vendredi 22 novembre 2024 - Durée : 1h00

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

## Exercice 1

1. (a) Mettre la fonction $f_1(t) = -4\sqrt{3}\cos(2t) + 4\sin(2t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$

   On note $a = -4\sqrt{3}$ et $b = 4$.
   On pose alors $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{48 + 16} = 8$.
   On pose ensuite

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{b}{A} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{a}{A} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

   Conclusion

$$f(t) = 8\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

   (b) Déterminer la période et l'amplitude de $f_1$.

   Amplitude $= A = 8$

   Période $= T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$

2. On rappelle que, pour tout réels $a$ et $b$ on a : $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.
   A l'aide de cette formule, déterminer la période de la fonction. $f_2(t) = \sin(27\pi t)\sin(3\pi t)$

   On utilise la formule pour écrire $f_2$ sous forme d'une somme :

$$f_2(t) = \frac{1}{2}(\cos(27\pi - 3\pi) - \cos(27\pi + 3\pi)) = \frac{1}{2}(\cos(24\pi) - \cos(30\pi))$$

   $f_2$ est donc la somme de deux fonctions de périodes différents : $T_1 = \dfrac{2\pi}{24\pi} = \dfrac{1}{12}$ et $T_2 = \dfrac{2\pi}{30\pi} = \dfrac{1}{15}$.

   Donc la période de $f_2$ est $T = ppcm\left(\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{1}{3}$.

3. Déterminer la période des fonctions suivantes :

   (a) $f_3(t) = -2\sin\left(\frac{t}{4}\right)$

   La période de $f_3$ est $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

   (b) $f_4(t) = \cos(100\pi(t + 0.01)) + 1$

   La période de $f_4$ est $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = \dfrac{1}{50}$

**Exercice 2**

1. Parmi les équations différentielles suivantes, dire celles qui sont homogènes, celles qui sont linéaires, celles qui sont d'ordre 1 et celles qui sont à coefficients constants.

   (a) $ty'(t) + y(t) = -10\cos(5t)$

   (b) $y'(t) \times y(t) = 0$

   (c) $y'(t) - 7y(t) + t^2 = 0$

   (d) $y''(t) - y(t) = 0$

   Les équations suivantes sont homogènes : (b) et (d)
   Les équations suivantes sont linéaires : (a), (c) et (d)
   Les équations suivantes sont d'ordre 1 : (a), (b) et (c)
   Les équations suivantes sont à coefficients constants : (c) et (d)

2. La fonction $f(t) = \cos(5t) - \sin(5t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$y'(t) - 5y(t) = -10\cos(5t)$$

   On calcule la dérivée de $f$ puis on remplace dans l'équation :

$$f'(t) = -5\sin(5t) - 5\cos(5t)$$

   Donc

$$\begin{aligned} f'(t) - 5f(t) &= -5\sin(5t) - 5\cos(5t) - 5(\cos(5t) - \sin(5t)) \\ &= -5\sin(5t) - 5\cos(5t) - 5\cos(5t) + 5\sin(5t) \\ &= -10\cos(5t) \end{aligned}$$

   Donc $f$ est solution.

3. Donner une équation différentielle, linéaire, homogène admettant $g(t) = 3e^{-4t}$ comme solution.
   Considérons que $g$ est de la forme $ke^{-\frac{t}{\tau}}$ alors $\tau = \dfrac{1}{4}$.
   Donc $g$ est solution de l'équation différentielle homogène

$$\tau y'(t) + y(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}y'(t) + y(t) = 0$$

**Exercice 3** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} 3y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$
   L'équation est homogène et sous forme canonique avec $\tau = 3$
   donc les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-\frac{t}{3}}$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
   De plus $y(0) = 2$ donc $Ce^0 = 2$ donc $C = 2$.
   La solution est donc $y(t) = 2e^{-\frac{t}{3}}$

2. $\begin{cases} y'(t) - 5y(t) = 7e^{3t} \quad (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
   L'équation n'est pas homogène.
   <u>étape 1 :</u> On commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(t) - 5y(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}y'(t) + y(t) = 0 \Rightarrow y_h(t) = Ce^{5t} \quad C \in \mathbb{R}$$

   <u>étape 2 :</u>On cherche une solution particulière de $(E)$.
   On pose $y_p(t) = ae^{3t}$.
   On a $y_p'(t) = 3ae^{3t}$, on veut que $y_p$ soit solution donc on remplace dans $(E)$ :

$$3ae^{3t} - 5ae^{3t} = 7e^{3t} \Leftrightarrow -2a = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2}$$

   Donc $y_p(t) = -\frac{7}{2}e^{3t}$.
   <u>étape 3 :</u> Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{5t} - \frac{7}{2}e^{3t} \quad C \in \mathbb{R}$$

   <u>étape 4 :</u> Calcul de $C$ grâce à la condition initiale :

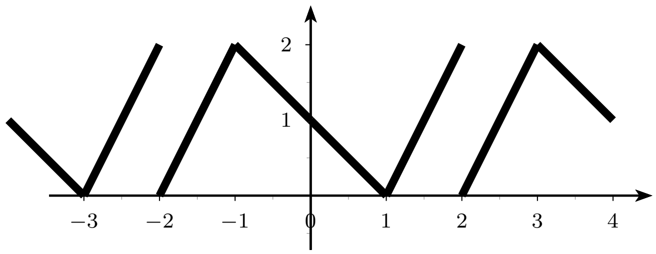
$$y(0) = 1 \Rightarrow Ce^0 - \frac{7}{2}e^0 = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{2}$$

   Conclusion : la solution est $y(t) = \frac{9}{2}e^{5t} - \frac{7}{2}e^{3t}$

3. $(3t+1)y'(t) - y(t) = 0$
   L'équation est à coefficients non constants. On applique la méthode de résolution :

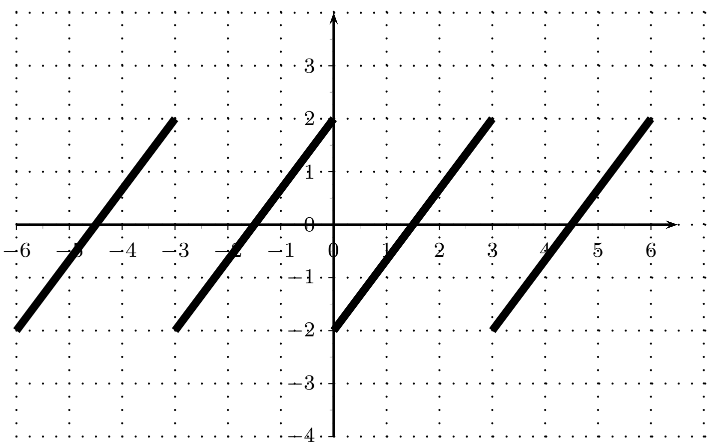
$$\begin{aligned}
(3t+1)y'(t) - y(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (3t+1)y'(t) = y(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{3t+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3t+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y(t)| = \frac{1}{3} \times \ln|3t+1| + C \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y(t) = ke^{\frac{1}{3}\times\ln|3t+1|} \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y(t) = ke^{\ln\left((3t+1)^{\frac{1}{3}}\right)} \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y(t) = k\,(3t+1)^{\frac{1}{3}} \quad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

**Exercice 4**

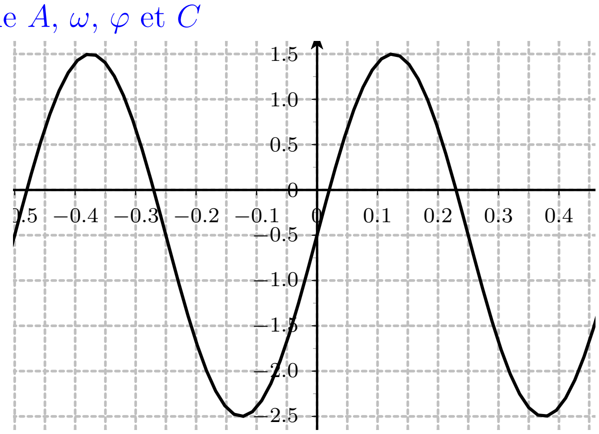
1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = -4$
   On a $f_1(-t) = -4 = f_1(t)$ donc $f_1$ est paire.
   (b) $f_2(t) = t^5 + 6t^3 - 8t$
   On a $f_2(-t) = (-t)^5 + 6(-t)^3 - 8(-t) = -t^5 - 6t^3 + 8t = -(t^5 + 6t^3 - 8t) = -f_2(t)$.
   Donc $f_2$ est impaire.
   (c)



   La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction n'est pas paire.
   La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction n'est pas impaire.
2. Tracer sur l'intervalle $[-6, 6]$ la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant toutes les propriétés suivantes :

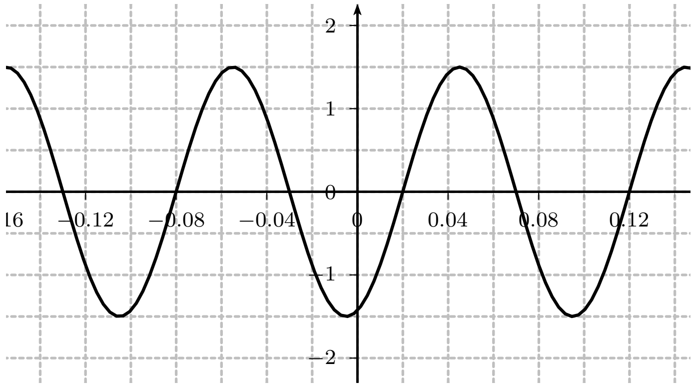
$$\begin{cases} f(t) = \frac{4}{3}t - 2 \text{ sur } [0,3] \\ f \text{ est impaire} \\ f \text{ est 6-périodique} \end{cases}$$




**Exercice 5**

1. Les deux fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$. Déterminer dans chaque cas les valeurs de $A$, $\omega$, $\varphi$ et $C$
   (a)



   Amplitude de $f = \frac{1}{2}(Max - Min) = 2$
   Période de $f$ : $T = 0,5$ donc pulsation de $f$= : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$.
   $C$ =Offset = Valeur moyenne de $f$=-0,5.
   $\Delta t = 0$ donc $\varphi = 0$
   Donc $f(t) = 2\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}$

(b) 


Amplitude de $f = \dfrac{1}{2}(Max - Min) = 1,5$

Période de $f$ : $T = 0,1$ donc pulsation de $f=$ : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20\pi$.

$C$ =Offset = Valeur moyenne de $f$=0.

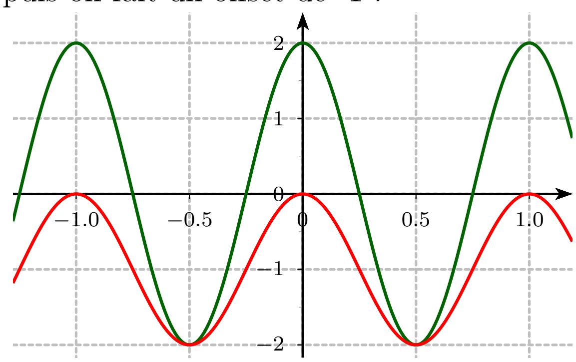
$\Delta t = -0,02$ donc $\varphi = \omega \Delta t = -0,02 * 20\pi = -\dfrac{2}{5}\pi$

Donc $f(t) = 1,5\sin\left(20\pi t - \dfrac{2}{5}\pi\right)$

2. On a représenté la fonction $f(t) = 2\cos(2\pi t)$ sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors sur chaque graphiqe $f_1$ et $f_2$ :

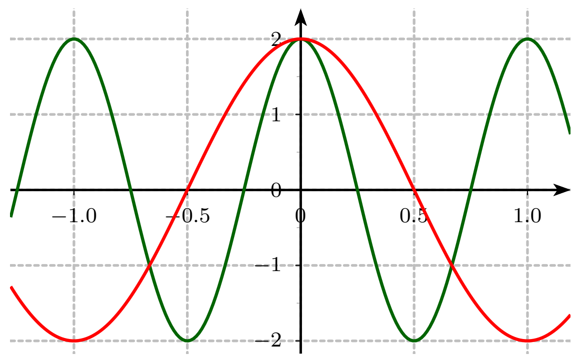
a) $f_1(t) = \dfrac{1}{2}f(t) - 1$

On divise l'amplitude par 2
puis on fait un offset de -1 :




b) $f_2(t) = f\left(\dfrac{1}{2}t\right)$

La période est multipliée par 2




3. Sur le graphe ci-dessous on a représenté une fonction $g$ de période 8. On pose $f_3(t) = f(t+a) + b$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $f_3$ soit impaire puis la représenter sur le graphe.
On pose $b = -0,5$ pour avoir une valeur moyenne nulle
et $a = +1$ pour avancer la courbe de 1.
On obtient la courbe en rouge qui est symétrique par rapport à l'origine.