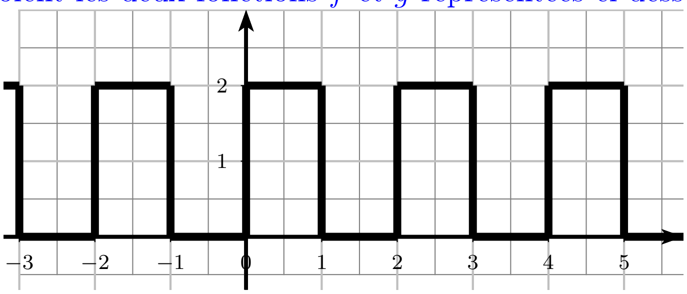
Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 21 novembre 2025 - Durée : 1h40

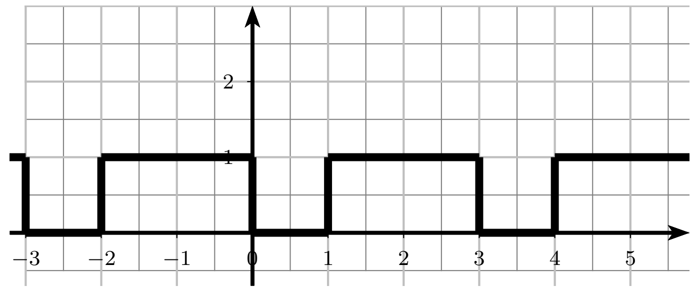
Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 $\simeq$ ***10 min***

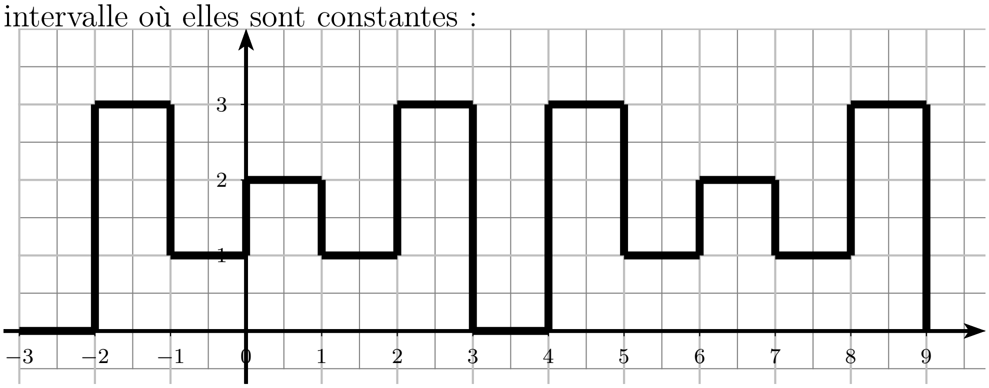
1. Soient les deux fonctions f et g représentées ci-dessous.





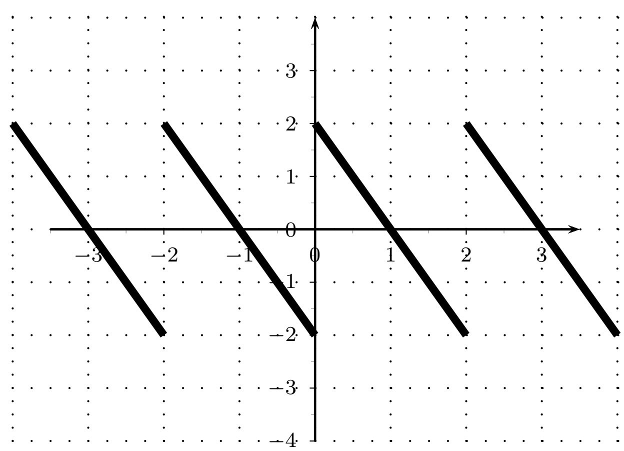
(a) Déterminer les périodes de f, g et $f+g$.
Par lecture graphique : $T_f = 2$ et $T_g = 3$.
La période de la fonction $f+g$ est donc $T = ppcm(2,3) = 6$.

(b) représenter sur le graphique ci-dessous la fonction $f+g$ sur l'intervalle $[-3;9]$.
Pour obtenir le graph de $f+g$ il suffit d'additionner les valeurs successives de f et g sur chaque intervalle où elles sont constantes :



2. Tracer, en expliquant votre démarche, sur l'intervalle $[-3,3]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant toutes les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(t) = -2t+2 \text{ sur }]0,1[\\ f \text{ est impaire} \\ f \text{ est 2-périodique} \end{cases}$$



On commence par tracer la droite $y = -2t+2$ entre 0 et 1

Puis on fait la symétrie de ce segment par rapport à l'origine (car la fonction est impaire)

Enfin, on répète le motif sur plusieurs périodes.

Exercice 2

Pour chacune des 3 fonctions suivantes : déterminer la parité et la période.

1. $f_1(t) = 17\sin(15\pi t)$

   La période de f_1 est $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{15\pi} = \dfrac{2}{15}$.

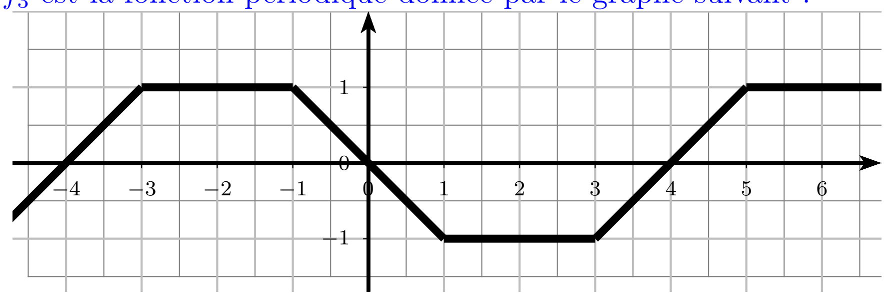
   La fonction sin est impaire donc f_1 est impaire.

2. $f_2(t) = 2\cos(48\pi t) - 3\sin(30\pi t)$

   La période de la fonction f_2 est $T = ppcm\left(\dfrac{2\pi}{48\pi}; \dfrac{2\pi}{30\pi}\right) = ppcm\left(\dfrac{1}{24}; \dfrac{1}{15}\right) = 3 \times \dfrac{1}{24} = 5 \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{3}$.

   $f_2(-t) = 2\cos(-48\pi t) - 3\sin(-30\pi t) = 2\cos(48\pi t) + 3\sin(30\pi t)$. Cette expression n'est ni égale à $f_2(t)$ ni a $-f_2(t)$. Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

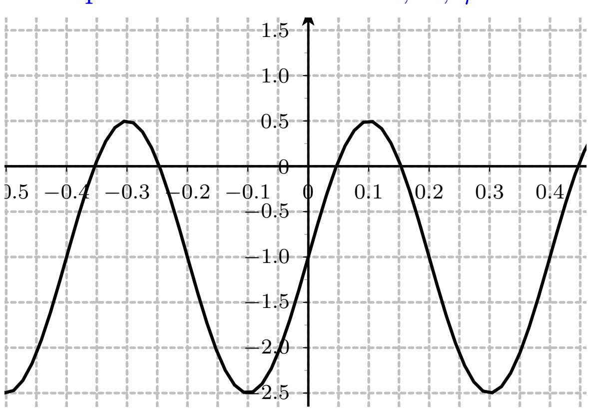
3. f_3 est la fonction périodique donnée par le graphe suivant :

   La courbe de la fonction à un cycle de longueur 8. Donc $T_3 = 8$.
   La courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'origine. Donc f_3 est impaire.

Exercice 3

1. Les deux fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$. Déterminer dans chaque cas les valeurs de A, ω, φ et C

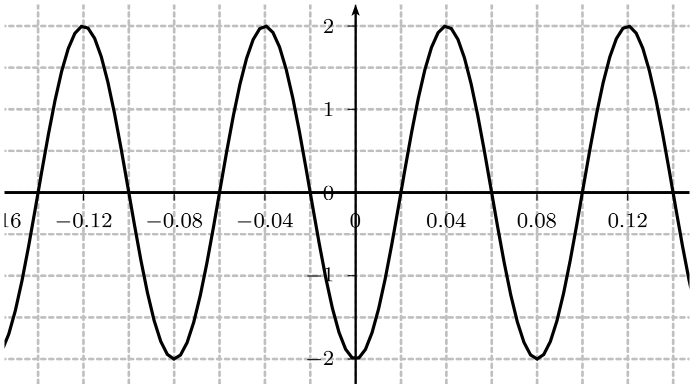
   (a) 

   $C = offset$ =valeur moyenne $= -1$.

   A =Amplitude=moitié de l'amplitude crête à crête$=1,5$

   T =période$= 0,4$ donc ω =pulsation$= \dfrac{2\pi}{0,4} = 5\pi$

   $\varphi =$ déphasage$= 0$.

(b) 

$C = offset$ =valeur moyenne = 0.

A =Amplitude=moitié de l'amplitude crête à crête=2

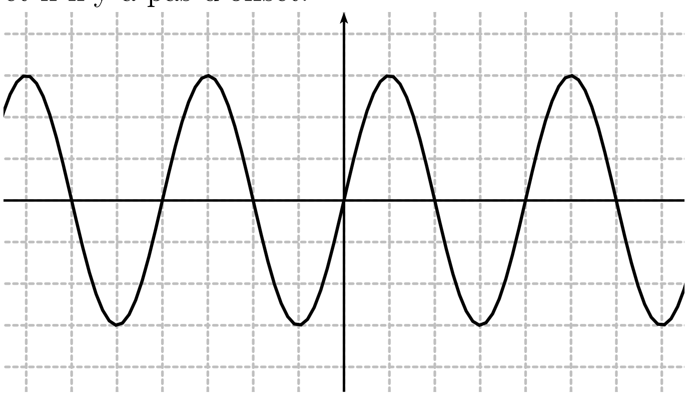
T =période= $0,08$ donc ω =pulsation= $\dfrac{2\pi}{0,08} = 25\pi$

φ = déphasage= $\omega\Delta t = 25\pi(-0,02) = -\dfrac{\pi}{2}$.

2. Représenter, sur les graphiques ci-dessous, les fonctions f_1 et f_2 en **précisant les unités** en abscisse et en ordonnée à chaque fois.

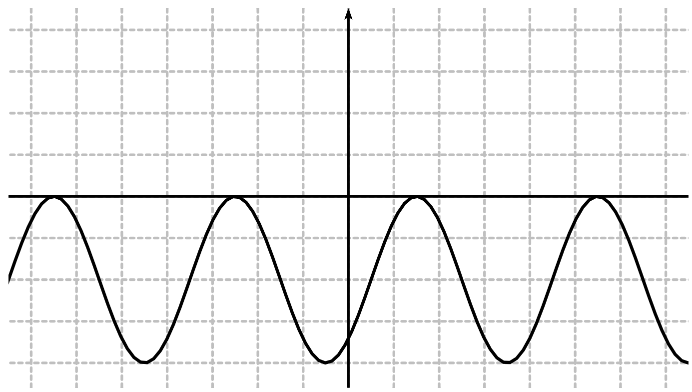
$f_1(t) = 3\sin(10\pi t)$

La pulsation vaut 10π donc $T_1 = \dfrac{1}{5} = 0,2$
On prend donc 1 carreau = 0,05 en abscisse.
L'amplitude vaut 3, on prend donc
1 carreau =1 en ordonnée.
Il n'y à pas de déphasage
et il n'y a pas d'offset.



$f_2(t) = \sin\left(\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

La pulsation vaut π donc $T_2 = 2$
On prend donc 1 carreau = 0,5 en abscisse.
L'amplitude vaut 1, on prend donc
1 carreau =0,5 en ordonnée.
On retarde la fonction de 0.25
et on fait un offset de -1



Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\dfrac{du}{dt}(t) = RC$

   Pour résoudre cette equation différentielle, il suffit de calculer une primitive :

$$\frac{du}{dt}(t) = RC \Leftrightarrow u(t)RCt + k$$

   où k est une constante réelle.

2. $\begin{cases} 5y'(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Cette équation est homogène. On commence par la mettre sous forme canonique

$$\frac{5}{4}y'(t) + y(t) = 0$$

Les solutions sont alors

$$y(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{4t}{5}}$$

Or $y(0) = 0$ donc $ke^0 = 0$ donc $k = 0$.
L'unique solution est donc la fonction nulle $y(t) = 0$

3. $\begin{cases} 10y'(t) + y(t) = 5e^{3t} \quad (E) \\ y(0) = 4 \end{cases}$

Cette équation n'est pas homogène.
• On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$10y'(t) + y(t) = 0 \qquad (H)$$

dont les solutions sont de la forme $y_0(t) = ke^{-\frac{t}{10}}$.
• On cherche une solution particulière. On pose alors $y_p(t) = ae^{3t}$. y_p est solution de (E) si et seulement si

$$10 \times 3ae^{3t} + ae^{3t} = 5e^{3t} \Leftrightarrow 31a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{31}$$

Donc $y_p(t) = \frac{5}{31}e^{3t}$ est une solution de E.
• Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = ke^{-\frac{t}{10}} + \frac{5}{31}e^{3t}$$

• On sait que $y(0) = 4$ donc $ke^0 + \frac{5}{31}e^0 = 4$ donc $k = 4 - \frac{5}{31} = \frac{119}{31}$
Conclusion : l'unique solution est la fonction

$$y(t) = \frac{119}{31}e^{-\frac{t}{10}} + \frac{5}{31}e^{3t}$$

4. $2ty'(t) - y(t) = 0$

Pour résoudre cette equation, on isole $\frac{y'}{y}$, puis on calcule les primitives de part et d'autre du =, enfin, on applique la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} 2ty'(t) - y(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{2t} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(y(t)) = \frac{1}{2}\ln(t) + C \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = e^{\frac{1}{2}\ln(t)+C} \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = e^{\ln(\sqrt{t})} \times e^C \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = k\sqrt{t} \end{aligned}$$

Où C est une constante réelle et $k = e^C$.

Exercice 5

1. La fonction $f(t) = te^{2t}$ est-elle solution de l'équation : $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$?

Pour vérifier si f est solution, on remplace y par f et y' par f'.

Avec $f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} f'(t) - 2f(t) &= e^{2t} + 2te^{2t} - 2te^{2t} \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

On retrouve bien le second membre de l'équation différentielle. Donc f est bien solution.

2. Donner un exemple d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants telle que la fonction $f(t) = 7e^{-\frac{t}{2}} + 5t$ est solution.
La fonction f est de la forme $ke^{-\frac{t}{\tau}} + y_p(t)$ avec $\tau = 2$ et $y_p(t) = 5t$.
On en déduit qu'une équation de la forme $\tau y'(t) + y(t) = at + b$ pourrait convenir.
Pour que $y_p(t) = 5t$ soit solution, il faut que

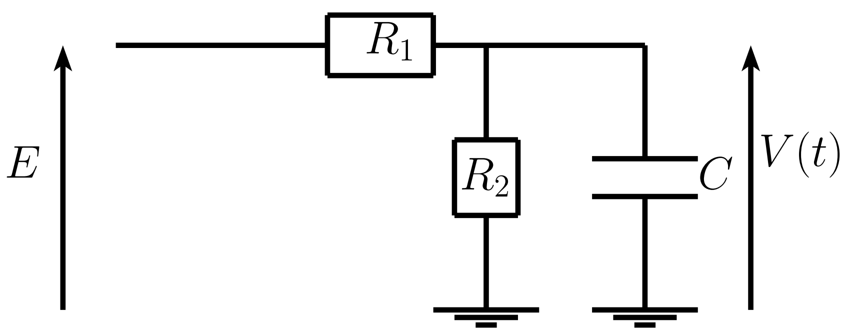
$$\tau \times 5 + 5t = at + b \Leftrightarrow a = 5 \quad b = 10$$

Donc f est solution de

$$2y'(t) + y(t) = 5t + 10$$

Exercice 6

On considère le circuit suivant :



Avec C **non chargé** initialement ;
Avec $R_1 = 10k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $C = 100\mu F$ et $E = 10V$.
On **admet** que la tension $V(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C \times \frac{dV}{dt}(t) + V(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

1. L'équation différentielle est-elle sous forme canonique ?
Donner l'expression valeur de τ, la constante de temps, et calculer sa valeur.
L'équation différentielle est bien sous forme canonique, car le coefficient de $y(t)$ vaut 1.
La constante τ est le coefficient de $'(t)$ donc

$$\tau = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$$

On remplace les constantes par leurs valeurs numériques :

$$\tau = \frac{10 \times 10^3 \times 10 \times 10^3}{10 \times 10^3 + 10 \times 10^3} \times 100 \times 10^{-6} = \frac{100 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-6}}{20 \times 10^3} = \frac{10000}{20000} = 0,5$$

2. Donner l'expression de la solution $V(t)$ en fonction de τ, R_1, R_2 et E. Puis remplacer τ, R_1, R_2 et E par leur valeur.
   Comme le second membre est une constante, on sait que la solution est de la forme

$$y(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + A$$

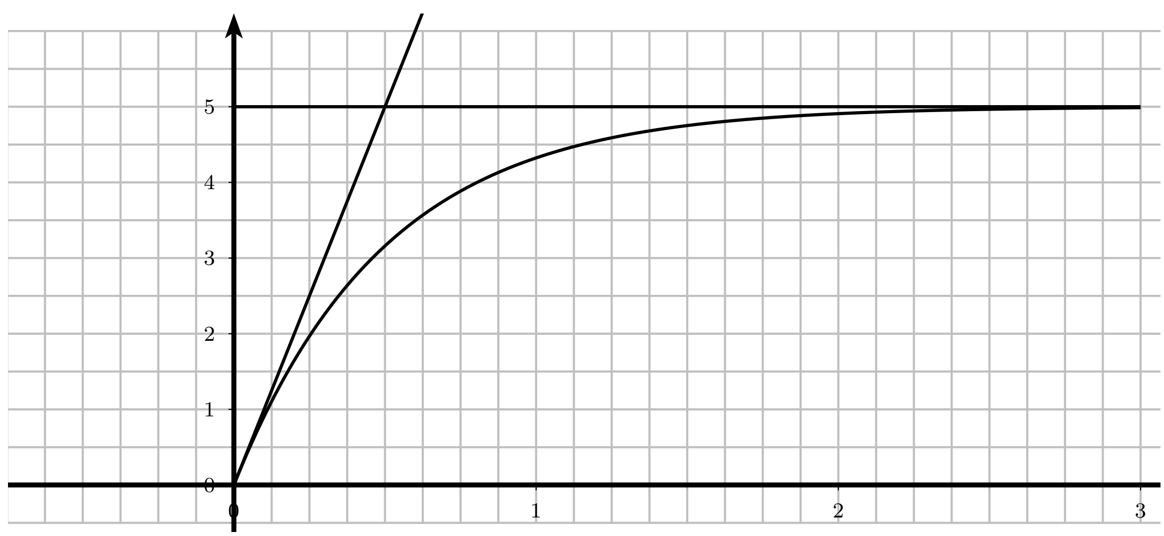
   Avec $A = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}E$.
   De plus, $y(0) = 0$ donc $k = -A$.
   Ainsi, la solution est

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

   On remplace les constantes par leurs valeurs numériques :

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{0.5}}\right)$$

3. Sur le graphique ci-dessous :
   • choisir les échelles des 2 axes
   • représenter la tangente en 0 à la courbe de V
   • représenter le plus précisément possible l'allure de la courbe de V
   Afin de représenter au mieux la courbe, on prend, par exemple 8 carreaux = 1 en abscisse et 2 carreaux = 1 en ordonnée.



Bonus : Expliquer comment on obtient l'équation différentielle de l'exercice 6.

Pour retrouver l'equation différentielle de l'exercice 6, il suffit de déterminer le modèle de Thévenin équivalent à la maille composée du générateur et des deux résistances :

— La résistance de Thévenin est $R_{th} = \dfrac{R_1 R2}{R_1 + R_2}$

— Le générateur de Thévenin vaut $E_{th} = \dfrac{R2}{R_1 + R_2} \times E$ (pont diviseur de tension)

On obtient alors un circuit RC dont la résistance vaut $R_t h$ et le générateur de tension fournit une tension E_{th}.