Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4
Vendredi 19 décembre 2025 - Durée : 1h00 - Correction

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 $\simeq$ ***25 min***

1. On considère l'équation
$$z^2 + z + 3iz + 2i - 2 = 0$$
Le nombre complexe $z = -1 - 2i$ est-il solution ? On remplace z dans l'équation :
$$\begin{aligned} z^2 + z + 3iz + 2i - 2 &= (-1-2i)^2 + (-1-2i) + 3i(-1-2i) + 2i - 2 \\ &= 1 + 4i - 4 - 1 - 2i - 3i + 6 + 2i - 2 \\ &= 1 + 4i - 4 - 1 - 2i - 3i + 6 + 2i - 2 \\ &= i \neq 0 \end{aligned}$$
Donc $z = -1 - 2i$ **n'est pas** solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $z^2 - 3z = 0$
$$\begin{aligned} z^2 - 3z = 0 &\Leftrightarrow z(z-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 3 \end{aligned}$$

(b) $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

On calcule le discriminant :
$$\Delta = (3i-4) - 4(1-7i) = 3 + 4i$$
On doit calculer la racine carrée de $3 + 4i$.
On cherche $a + ib$ tel que $(a+ib)^2 = 3 + 4i$.
D'après le cours, on obtient le sytème suivant : $\left\{ \begin{array}{rcll} a^2 - b^2 &=& 3 & (1) \\ 2ab &=& 4 & (2) \\ a^2 + b^2 &=& 5 & (3) \end{array} \right.$

$(1) + (3) \Rightarrow 2a^2 = 8$ d'où $a = \pm 2$
$(1) \Rightarrow b^2 = a^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ d'où $b = \pm 1$
D'après (2), a et b sont de même signe, donc la racine carrée de Δ vaut $2 + i$ ou $-2 - i$.
Les solutions de l'équation sont donc
$$Z_1 = \frac{-(3i-4) + 2 + i}{2} = 3 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-(3i-4) - 2 - i}{2} = 1 - 2i$$

(c) $z^2 + 4 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = -16$. On a donc 2 racines complexes conjuguées :

$$Z_1 = \frac{-i\sqrt{16}}{2} = -2i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{i\sqrt{16}}{2} = 2i$$

Exercice 2 $\simeq$ ***20 min***

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

(a) $Z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$

On peut montrer que $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$$Z_1 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{-i\pi} = 8e^{i\pi}$$

(b) $Z_2 = 3i(1 - i\sqrt{3})(-2 + 2i)$

On détermine d'abord les formes exponentielles des facteurs :

$$3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_2 &= (3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)} \\ &= 12\sqrt{2}e^{i\left(\frac{6\pi - 4\pi + 9\pi}{12}\right)} \\ &= 12\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} \end{aligned}$$

(c) $Z_3 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{(3 + 3i)^2}$

On détermine d'abord les formes exponentielles des facteurs :

$$3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad (3 + 3i)^2 = 18e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{18e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{1}{9}e^{i\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{9}e^{-i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

2. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $Z_4 = \dfrac{3}{i^5} - \dfrac{1}{i^4} + \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{5}{i} + 1$

$$Z_4 = -3i - 1 + (-1) + 5i + 1 = -1 + 2i$$

(b) $Z_5 = e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi}{6}} + \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{3}} + 4e^{i\pi}$

On remplace chaque exponentiellle par sa forme trigonométrique puis algébrique :

$$\begin{aligned} Z_5 &= i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4(-1) \\ &= i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} - 4 \\ &= -4 + 2i \end{aligned}$$

3. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument de :

$$Z_6 = \left(e^{\frac{i\pi}{12}} - e^{\frac{7i\pi}{12}}\right)\left(e^{-\frac{i\pi}{12}} + e^{\frac{5i\pi}{12}}\right)$$

Il n'est pas possible de passer en forme trigonométrique (sans connaître les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$). On distribue donc :

$$Z_6 = e^0 + e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}} - e^{i\pi} = 1 + i - i - (-1) = 2$$

— Module : $|Z_6| = 2$
— Argument : $\arg(Z_6) = 0$
— Partie réelle : $\mathfrak{Re}(Z_6) = 2$
— Partie imaginaire : $\mathfrak{Im}(Z_6) = 0$

Exercice 3 $\simeq$ ***15 min***

1. Linéariser l'expression $f(x) = \sin(4x)\cos(3x)$.
   On peut utiliser la formule $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ ou passer par les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\sin(4x)\cos(3x) &= \frac{e^{4xi} - e^{-4xi}}{2i} \times \frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} \\
&= \frac{e^{7xi} + e^{xi} - e^{-xi} - e^{-7xi}}{4i} \\
&= \frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{4i} + \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{4i} \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} + \frac{1}{2}\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \\
&= \frac{1}{2}\sin(7x) + \frac{1}{2}\sin(x)
\end{aligned}$$

2. Déterminer le module et l'argument de

$$Z_{11} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$$

— Module :

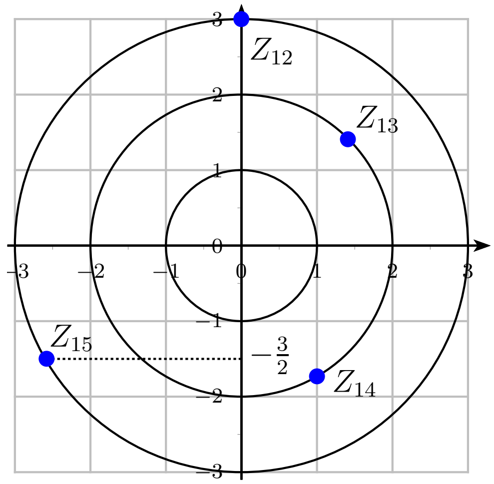
$$|Z_{11}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

— Argument :

$$\arg(Z_{11}) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \pmod{2\pi}$$

avec R, C, L et ω des constantes positives.

3. Placer précisément les points d'affixe Z_{12}, Z_{13} et Z_{14}
   (a) $Z_{12} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ est sur le cercle de rayon 2, avec $\frac{5\pi}{3}$ comme argument.
   (b) $Z_{13} = -3e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\pi} \times 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = 3e^{i\frac{5\pi}{2}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$ est sur l'axe des ordonnées.
   (c) $Z_{14} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ est sur le cercle de rayon 2, avec $\frac{\pi}{4}$ comme argument.



4. Déterminer la forme algébrique ou exponentielle de Z_{15} en expliquant votre démarche.
   On peut facilement lire que $|Z_{15}| = 3$ et $\mathfrak{Im}(Z_{15}) = -\frac{3}{2}$.
   On en déduit que $3 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$ avec $a = \mathfrak{Re}(Z_{15})$.
   Donc que $a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \dfrac{27}{4}$. Comme a est négatif : $a = -\frac{\sqrt{27}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $Z_{15} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$