université PARIS-SACLAY | IUT DE CACHAN

GEII

Mathématiques

Semestre 1

Travaux Dirigés Mathématiques

Année 2025–2026

Nom :
Prénom :
Groupe :

Table des matières

Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation.
Arthur Ashe

Chapitre 1

Rappels de calcul littéral

Exercice 1

1. Donner une écriture sous forme d'une fraction irréductible :

   (a) $A = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

   (b) $B = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$.

   (c) $C = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}$.

   (d) $D = \dfrac{\frac{1}{2}}{3}$

   (e) $E = \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

   (f) $F = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

   (g) $G = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.

   (h) $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

2. Écrire sous la forme $E + \frac{P}{Q}$ où E est un nombre entier et $\frac{P}{Q}$ est une fraction inférieure à 1 :

   (a) $A = \frac{219}{12}$

   (b) $B = 42,3 + \frac{31}{5}$

   (c) $C = \frac{R_1R_2 + R_1^2}{R_1R_2}$ avec $R_2 > R_1$

Exercice 2

1. Simplifier les écritures :

   (a) $A = \sqrt{128} - 3\sqrt{8}$

   (b) $B = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$

   (c) $C = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{4})$

2. Pour chaque égalité remplacer les ... par une valeur numérique (enitère ou pas)

   (a) $2^{20} + 2^{20} + 2^{20} + 2^{20} = 2^{\cdots}$

   (b) $\left(10^5\right)^3 = 10^{\cdots}$

   (c) $10^{-6}\dfrac{\left(10^2\right)^4 \times 10}{10^{-3} \times 10^5} = 10^{\cdots}$

   (d) $\dfrac{2 \times 10^6 + 5 \times 10^7}{10^8} = 52 \times 10^{\cdots}$

   (e) $\dfrac{31^2 + 31}{31} = \ldots$

   (f) $\dfrac{50^{100}}{100^{50}} = 25^{\cdots}$

   (g) $(e^2 + e^{-2}) \times (e^2 - e^{-2}) = \ldots$

   (h) $e^3 \times e^5 \times e^{-4} = \ldots$

   (i) $\dfrac{e^2\left(e \times \frac{1}{e^{-2}}\right)}{e^4 \times e^2 \times e^{-4}} = e^{\cdots}$

   (j) $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^5 + \alpha^7} = \dfrac{1}{\ldots + \ldots}$

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $2x - 7 = 3x + 8$

   (b) $3(x+5) = -4x$

   (c) $\dfrac{x-3}{4} = 2x$

   (d) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{6}{5}$

   (e) $\dfrac{1}{x+2} = 3$

   (f) $\dfrac{x+2}{x-4} = 7$

   (g) $\dfrac{\frac{2}{x} + \frac{4}{3}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}} = -2$

2. On considère l'expression suivante : $0 = \dfrac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

   (a) Déterminer V_1 en fonction des autres constantes.

   (b) Déterminer R_1 en fonction des autres constantes.

3. On considère l'expression suivante : $V = \dfrac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

   (a) Déterminer V_1 en fonction des autres constantes.

   (b) Déterminer R_1 en fonction des autres constantes.

   (c) Déterminer R_2 en fonction des autres constantes.

Exercice 4

1. Tracer les droites représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = -2x + 1$,

   (b) $g(t) = -\frac{1}{2}t + 3$,

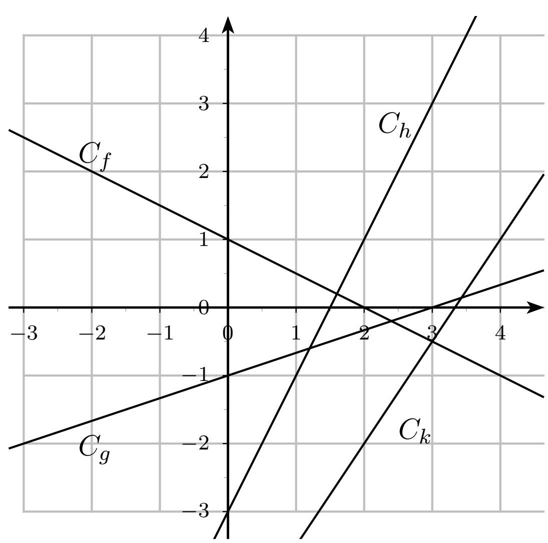
   (c) $h(x) = \dfrac{x}{3}$,

   (d) $k(t) = -\dfrac{(t+1)}{4}$,

   (e) $l(x) = 3$.

   (f) $U(i) = Ri$ avec $R = 50(\Omega)$.

2. Donner les équations de chacune des droites suivantes :



Exercice 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^5 - 7x^3 + 32x^2 + 19$
2. $f(t) = \dfrac{3t^3 + 3t^2 + 3t}{5}$
3. $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x}$
5. $f(\theta) = \sin(-5\theta)$
6. $f(s) = e^{-\frac{1}{3}s}$
7. $f(t) = \cos(t)\sin(t)$
8. $f(t) = \cos(3t)\sin(2t)$
9. $f(t) = t\cos(2t-5)$
10. $f(t) = \ln(3t+5)$
11. $f(t) = 3te^{\frac{t}{2}}$
12. $f(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$
13. $U(t) = Ri$
14. $U(i) = Ri$

Exercice 6 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(t) = k$
2. $g(t) = 3t$
3. $h(x) = ax + k$
4. $U(i) = R$
5. $k(t) = \dfrac{1}{t}$
6. $l(t) = \dfrac{1}{t+2}$
7. $m(t) = \dfrac{2}{3t-42}$

Compléments

Exercice 7

1. Simplifier les écritures :

   (a) $A = \sqrt[3]{64}$

   (b) $B = \left(16^3\right)^{\frac{1}{4}}$

   (c) $C = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

2. Pour chaque égalité ou inégalité, dire si elle est vraie ou fausse.

   (a) $\dfrac{\frac{1}{RC\omega}}{1+\frac{1}{RC\omega}} = \dfrac{1}{1+RC\omega}$

   (b) $\dfrac{3,0003}{2,0002} = 1,5001$

   (c) $2^{39} < 3^{26} < 10^{13}$

   (d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{147}$

   (e) 8=le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2048×25^4

3. Résoudre l'équation $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{147}$

Exercice 8 Tracer les droites représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{2(x+1)}{5}$,
2. $g(t) = -\dfrac{7}{3}t + \dfrac{1}{3}$,
3. $h(x) = \dfrac{x}{3} + 2x - 5$,

Exercice 9

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^5 - 7x^3) \times (3x^2 + 9)$
2. $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2 - 2x}$
3. $f(t) = \sqrt{t}e^{3t}$
4. $f(t) = 2t\cos(3t)\sin(4t)$
5. $f(t) = \frac{1}{t} \times \ln(3t+5)$

Chapitre 2

Logique et notations mathématiques

Exercice 1 ***Un peu de logique***

On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes en langage propositionnel.

1. Si la caravane passe alors les chiens aboient
2. Les chiens n'aboient pas
3. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient
4. Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas

Exercice 2

Pour chaque égalité ou inégalité, dire si elle est vraie ou fausse.

1. Quels que soient x et y deux entiers naturels, $\dfrac{x}{y+1}$ est plus petit que $\dfrac{2x}{2y+1}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^4 + x^3 + x^2 + x = x^{10}$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ on a $\dfrac{x+7}{x+3} = \dfrac{7}{3}$
4. Quels que soient a, b et c non nuls, on a $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{\frac{b}{c}}$

Exercice 3 ***Implication VS équivalence***

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = 4 \ldots x = 2$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = 1 \ldots x = 0$
3. Soient a et b deux réels : $a > 0$ et $b > 0 \ \ldots \ ab > 0$
4. Soient a et b deux réels : $a = b \ldots a^2 = b^2$
5. Soient a et b deux réels : $a = b \ldots a^3 = b^3$

Exercice 4 ***Quantificateurs***

1. La fonction f des propriétés suivantes est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) f est la fonction nulle.

(b) f est la fonction identité (la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).

(c) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.

(d) Le graphe de f est toujours au dessus de la droite $y = -3$.

2. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

   (a) Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.

   (b) Il y a un entier qui est plus grand que tous les autres (cette affirmation est fausse)

   (c) N est un entier pair.

Exercice 5 ***Quantificateurs***

Soit f une fonction de $D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \ \forall x \in D \ \ f(x) \leq M. \tag{2.1}$$

1. Traduire et expliquer cette phrase mathématique.
2. Donner un exemple de fonction qui vérifie (2.1) et un exemple de fonction qui ne vérifie pas (2.1).
3. La proposition (2.1) est elle équivalente à

$$\forall x \in D \ \ \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \leq M. \tag{2.2}$$

4. Donner la négation de (2.1).

Exercice 6

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, la fonction $h_j(x)$ donne son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Exercice 7 ***Quantificateurs***

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en argumentant la réponse.

   (a) P_1 : « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y > x^2$ ».

   (b) P_2 : « $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 < x$ ».

   (c) P_3 : « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 \geq x$ ».

2. La négation de la proposition P_2 est elle P_3 ?

Exercice 8 ***Contraposée***

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$
4. $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ on a : $x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$

Exercice 9 ***Vrai ou Faux***

Le but de cet exercice est de déterminer, pour chacune des assertions, si elle est vraie ou fausse.

Rappel : Pour démontrer qu'une assertion est fausse, on donne un exemple qui met cette assertion en défaut. Dans ce cas, il s'agit d'un contre-exemple.

Pour démontrer qu'une assertion est vraie, on établit un raisonnement dans lequel chaque étape doit étre justifiée (y compris celles qui paraissent, dans un premier temps, évidentes).

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2.$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^3 = x^3 + y^3.$
3. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^3 = x^3 + y^3.$
4. $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}.$
5. Il n'existe pas d'équation qui admette exactement cinq solutions réelles distinctes.
6. $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$, le nombre $A = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

Exercice 10 ***Symbole Sigma***

1. Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ en faisant disparaitre ce symbole :

   (a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$ (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2i+1}$ (c) $S_3 = \displaystyle\sum_{p=1}^{10} \frac{1}{2i}$ (d) $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} 7$

2. écrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.

   (a) $S_1 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{10}$ (b) $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + 14^2$ (c) $S_3 = 3^2 + 4^2 + \cdots + 103^2 + 104^2$

Exercice 11 ***Symbole Sigma***

Traduire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

1. $S_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{48}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{64}$
3. $S_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots - \dfrac{1}{28}$
4. $S_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{9}{10} + \dfrac{10}{11}$
5. $S_5 = 1^2 + 3^2 + 5^2 \cdots + 13^2 + 15^2$
6. $S_6 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + \ldots + 12 \times 14$

Compléments

Exercice 12 ***Un peu de logique***

Déterminer les raisonnements qui sont logiquement valides :

1. Edouard est un élève. Tous les élèves sont charmants. Donc Edouard est charmant.
2. Tous les élèves sont charmants. Edouard est charmant. Donc Edouard est un élève.
3. Aucun élève n'est charmant. Edouard n'est pas charmant. Donc Edouard est un élève.
4. Aucun élève n'est charmant. Edouard est un élève. Donc il n'est pas charmant.

Exercice 13 ***Un peu de logique***
On suppose vraie l'implication suivante : il pleut $\Rightarrow$ je prends mon parapluie.

1. S'il ne pleut pas, prends-je mon parapluie ?
2. Aujourd'hui j'ai pris mon parapluie ; est ce qu'il pleut ?
3. Hier je n'ai pas pris mon parapluie, a-t-il plu ?

Exercice 14
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés suivants :

a)$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$ b)$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ f(x) = y$ c)$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = y$

Exercice 15 ***Extrait de DS 2018***
Les questions 1 et 2 sont ind'ependantes.

1. Écrire les sommes suivantes avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 625$ (indication : $\sqrt{625} = 25$)
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{83}$
2. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :
   (a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\ t.q.\ x \times y \geq 1$

Exercice 16
Soit $a > b$. Considérons $c = a - b$, donc $a = b + c$. Par conséquent, $a(a - b) = (b + c)(a - b)$ donc $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$. Alors $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$ et $a(a - b - c) = b(a - b - c)$. Et finalement $a = b$!
Où est l'erreur ?

Exercice 17

1. Ecrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.

   (a) $S_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{48}$ (b) $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{64}$ (c) $S_3 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} - \ldots - \dfrac{27}{28}$

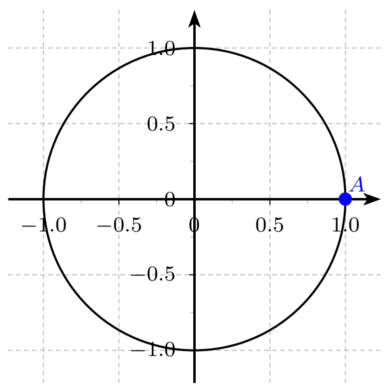
2. Donner la valeur exacte des sommes

   (a) $S_4 = \displaystyle\sum_{n=2}^{8} 3 \times 2^n$ (b) $S_5 = \displaystyle\sum_{k=3}^{5} \frac{k-1}{2k}$

Chapitre 3

Trigonométrie

Exercice 1 Représenter sur le cercle trigonométrique les points M_i tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ soit $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{29\pi}{3}$, $\dfrac{41\pi}{6}$, $\dfrac{367\pi}{2}$, $-\dfrac{26\pi}{8}$.



Exercice 2

Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

1. $\dfrac{17\pi}{2}$
2. $-\dfrac{23\pi}{4}$
3. $-\dfrac{39\pi}{3}$
4. $\dfrac{345\pi}{6}$
5. $-\dfrac{367\pi}{5}$
6. $\dfrac{45367\pi}{20}$

Exercice 3

Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

1. $\cos\left(\dfrac{25\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{258\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(\dfrac{12345\pi}{4}\right)$
5. $\sin\left(\dfrac{335\pi}{6}\right)$
6. $\sin\left(\dfrac{211\pi}{4}\right)$
7. $\tan\left(-\dfrac{335\pi}{6}\right)$
8. $\tan\left(\dfrac{212\pi}{3}\right)$

Exercice 4

1. Donner l'ensemble des nombres de $[-\pi;\pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Donner l'ensemble des nombres de $[0;2\pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}$ où $k\in\mathbb{Z}$
3. Donner l'ensemble des nombres de $[-\pi;\pi]$ qui s'écrivent sous la forme $-2\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{4}$ où $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 5

Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les expressions suivantes :

$$A=\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\qquad B=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\qquad C=\sin(257\pi+x).$$

Exercice 6

1. Donner les valeurs exactes des nombres suivants :
   (a) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
   (b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
   (c) $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
2. Soit $x\in[\pi;2\pi]$. Sachant que $\cos(x)=\frac{3}{5}$, déterminer la valeur de $\sin(x)$

Exercice 7

Mettre les expressions suivantes sous la forme $A\sin(\omega t+\varphi)$ où $A>0$.

1. $f(t)=\cos(2t)+\sin(2t)$
2. $g(t)=-\sqrt{3}\sin(t)+\cos(t)$
3. $h(t)=\cos(\pi t)$
4. $k(t)=-3\sin(2t)$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis donner les solutions dans l'intervalle I :

1. $\cos(x)=\frac{1}{2},\ I=[0;2\pi]$
2. $\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ I=[-\pi;\pi]$
3. $\sin(3x)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ I=[-\pi;\pi]$
4. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ I=[0;2\pi]$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques :

1. $\cos(x)+\sin(x)=1$
2. $\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=\sqrt{3}$
3. $\sin(2x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$
4. $\cos(2x)=\sin(x)$

Exercice 10

Résoudre sur $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes à l'aide du cercle trigonométrique :

1. $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$
2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq\frac{1}{2}$
3. $\cos(x)\leq\sin(x)$
4. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}$

Exercice 11

1. Déterminer
   (a) $\arctan(1)$
   (b) $\arctan(-1)$
   (c) $\arctan(0)$
   (d) $\arctan(\sqrt{3})$
   (e) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
   (f) $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan(t)$
   (g) $\lim\limits_{t\to-\infty} \arctan(t)$
2. Déterminer
   (a) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$
   (b) $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)$
   (c) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$
   (d) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$
   (e) $\tan(\arctan(2))$
   (f) $\tan(\arctan(-5))$

Compléments

Exercice 12
Soit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2. Montrer que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
3. Montrer que $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$
4. En déduire une formule pour $\tan(2x)$

Exercice 13
Montrer que, pour tout $x > 0$ on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 14

1. Montrer que pour tout x de la forme $x = \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.
2. Sachant que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ calculer $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 15
Soit la fonction réelle $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$.

1. Mettre f sous la forme $A\sin(2x + \varphi)$ avec $A > 0$. Quelle est la valeur maximale de f ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 16

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler la formule de $\cos(a + b)$.
2. Montrer que $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 17
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Justifier soigneusement** les réponses.

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\sin\left(\pi t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$
3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 1$
4. $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{k\pi}{2} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos\left(\pi - t\right) \times \cos\left(\pi + t\right)$$

Exercice 18
Déterminer (justifier soigneusement vos réponses) :

1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
2. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
3. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$
4. $\tan\left(\arctan\left(10^{-6}\right)\right)$
5. $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan(t)+\arctan(-t)$

Chapitre 4

Equations différentielles

Exercice 1 ***Vérification***

1. Soit E une constante réelle. La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(t) = E(1-e^{-2t})$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?
$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = E$$

2. La fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?
$$y'(x) + \frac{(y(x))^2}{x+3} = \frac{1}{x-2}$$

Exercice 2 ***Équations différentielles et primitives***

Résoudre les équations suivantes :

1. $5y'(t) = 0$
2. $\dfrac{du}{dt}(t) = 470$
3. $u'(t) = \dfrac{I}{C}$
4. $3y'(t) = 2t$
5. $3y''(t) = 4$
6. $\dfrac{du}{dt}(t) = R$ avec $u(0) = 12$.

Exercice 3 ***Équations homogènes***

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $12,32 \times 10^{-3}y'(t) + y(t) = 0$

   (b) $47y'(t) + \dfrac{1}{2,2\times 10^{-6}}y(t) = 0$

2. Résoudre l'équation suivante puis tracer l'allure de la courbe de y :
$\begin{cases} RCy'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 12 \end{cases}$ avec $R = 6800$ et $C = 0,0047$

Exercice 4 ***Équations non homogènes***

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $y'(t) - 2y(t) = 3$

   (b) $4y'(t) - 3y(t) = 5t$

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4y'(t) - 3y(t) = 5t \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = -2\cos(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2y'(t) + y(t) = 5e^{-2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 5 ***Équation non homogène : cas particulier***

Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} 2y'(t) - 4y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 ***Équations homogènes à coefficients non constants***

Résoudre les équations suivantes :

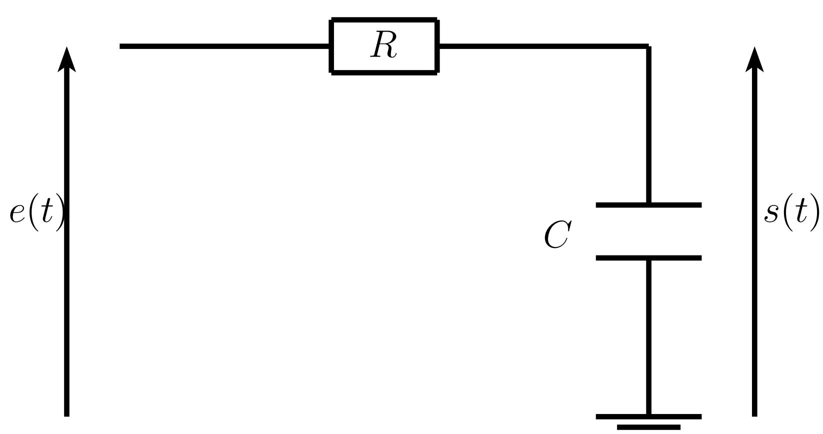
1. $y'(t) + ty(t) = 0$,
2. $(1+t^2)y'(t) + ty(t) = 0$,
3. $(1+t^3)y'(t) = t^2y(t)$ avec $y(1) = 2$,

Exercice 7 ***On connaît la réponse***

1. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ comme solution.
2. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{3t} + 2$ comme solution.
3. Donner une équation différentielle du 1er ordre qui admette $f(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{4}} + 2t - 1$ comme solution.
4. Donner une équation différentielle qui admette $f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ comme solution.

Exercice 8 ***Lien avec le génie électrique***

On considère le circuit RC suivant :



Avec C non chargé initialement ;

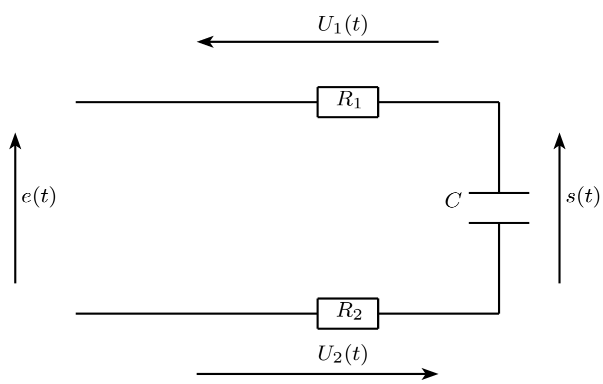
1. Justifier que l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée $e(t)$ est
$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$
où $\tau = RC$.
2. On considère que la tension d'entrée est constante : $e(t) = E$.
   (a) Résoudre l'équation en fonction de E, R et C.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de s au point d'abscisse 0 (en fonction de E, R et C).
   (c) Montrer que le point d'abscisse τ de T appartient à l'asymptote en $+\infty$ de C_s (la courbe représentative de f).
   (d) Quelle durée T (en fonction de τ) faut-il attendre pour que s atteigne la valeur $0.95E$?
   (e) Si $C = 2,2\mu F$, $R = 4700\Omega$ et $E = 10V$, calculer $s(t)$ et représenter son graphe.

Compléments

Exercice 9 ***Extrait de DS 2019***

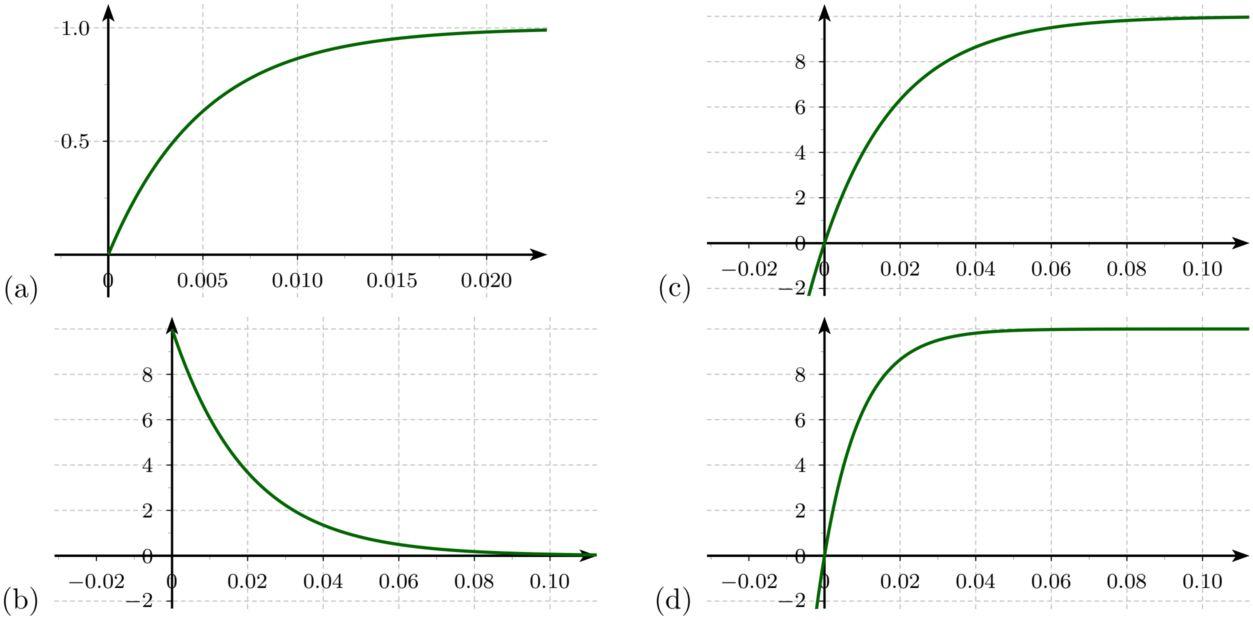
1. Déterminer une équation différentielle dont la fonction $f(x) = \cos(\pi x)$ est solution.
2. La fonction $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{9}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?
$$4y'(t) - 3y(t) = 5t$$
3. La fonction $f(x) = \ln(1+x)e^{-x}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?
$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Exercice 10 On considère le circuit suivant :



On alimente en entrée avec une tension continue $e(t) = 10$ volts.

1. Montrer que le signal de sortie $s(t)$ vérifie l'équation différentielle (E_1) :
$$(R_1 + R_2)C\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = 10 \qquad (E_1)$$
2. Déterminer, en fonction de C, R_1 et R_2, les solutions de l'équation (E_1).
3. Déterminer l'unique solution de l'équation (E_1) qui vérifie la condition initiale $s(0) = 0$.
4. On considère : $R1 = 1K\Omega$, $R2 = 2K\Omega$ et $C = 10\mu F$. Parmi les graphiques suivants, lequel est celui de la solution trouvée à la question 3 ? (justifier !)



Exercice 11

Le but est de résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 0,05y(10 - y)$ et $y(0) = 0,01$. On admet que la fonction solution de s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que
$$y \text{ vérifie } \begin{cases} y' = 0,05y(10-y) \\ y(0) = 0,01. \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = \frac{1}{y} \text{ vérifie } \begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 100 \end{cases} .$$
2. En déduire la solution de l'équation différentielle (E).

Chapitre 5

Fonctions périodiques

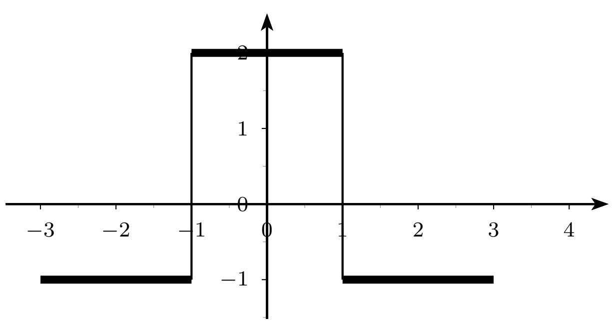
Exercice 1

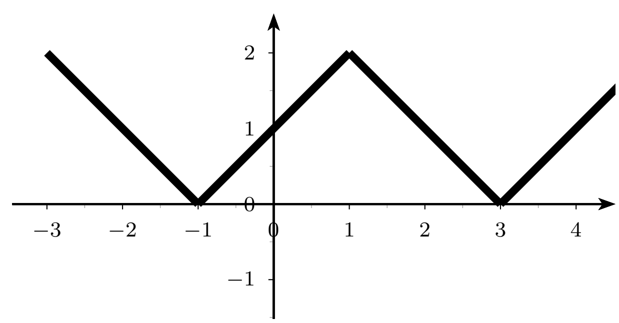
Déterminer la parité des fonctions suivantes :

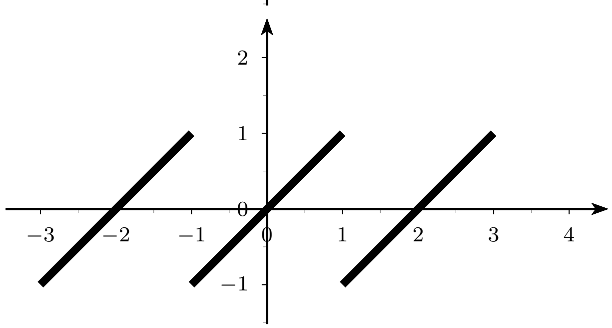
1. $f(t) = t^3 - 4t$,
2. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 3}$,
3. $f(t) = \cos(2t) + \sin(t)$,
4. $f(t) = e^{\sin(t)}$,
5. $f(t) = \ln(\cos(t))$.
6. $f(t) = e^{\sin^2(t)}$.

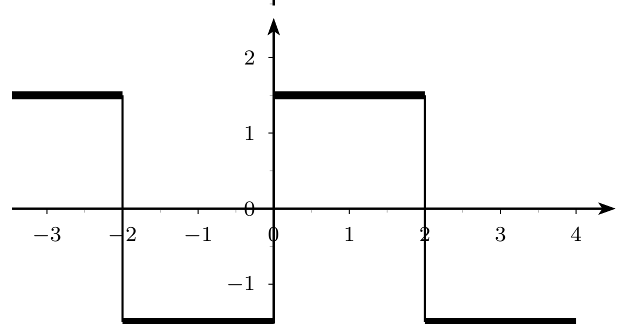
Exercice 2

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. 

3. 

2. 

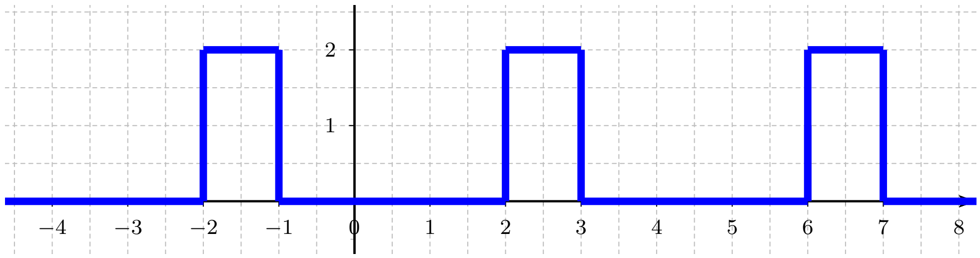
4. 

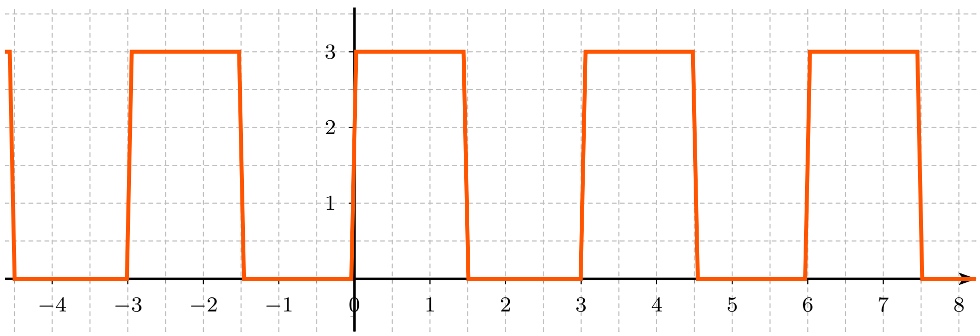
Exercice 3

Déterminer les périodes des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \cos(30\pi t)$,
2. $f(t) = -7\cos(10\pi t)$,
3. $f(t) = 2\sin(8t) + 3$,
4. $f(t) = 2\sin\left(-2t + \frac{\pi}{3}\right) - 5$,
5. $f(t) = \tan(t)$
6. $f(t) = \cos(2\pi t) + \sin(5\pi t)$,
7. $f(t) = \cos(18\pi t) + \sin(48\pi t)$.
8. $f(t) = \sin(10\pi t)\cos(10\pi t)$,

Exercice 4 Soient les fonctions périodiques f et g suivantes :





1. Déterminer les périodes de f, g et $f+g$.
2. Tracer « à la main » le graph de $f+g$ sur l'intervalle $[-4; 8]$.

Exercice 5

Tracer sur $]-4; 8[$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

1. f est paire,
2. f est de période 4,
3. sur $[0, 2]$ on a $f(t) = \dfrac{1}{2}t + 1$.

Exercice 6

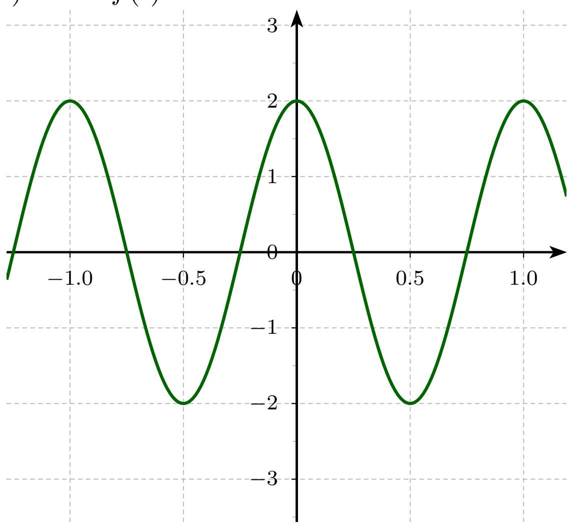
Tracer sur $]-2; 4[$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

1. f est impaire,
2. f est de période 2,
3. sur $]0, 1[$ on a $f(t) = t + 1$.

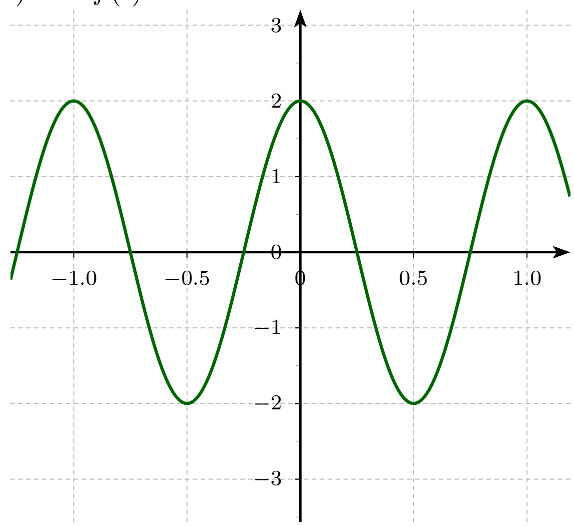
Exercice 7

On a représenté une fonction f sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors :

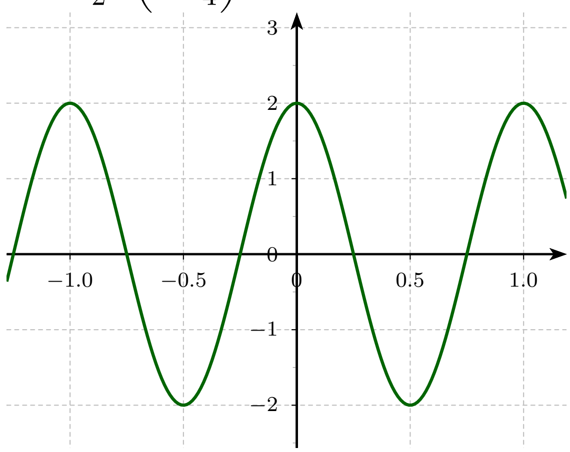
1) $t \to -f(t)$



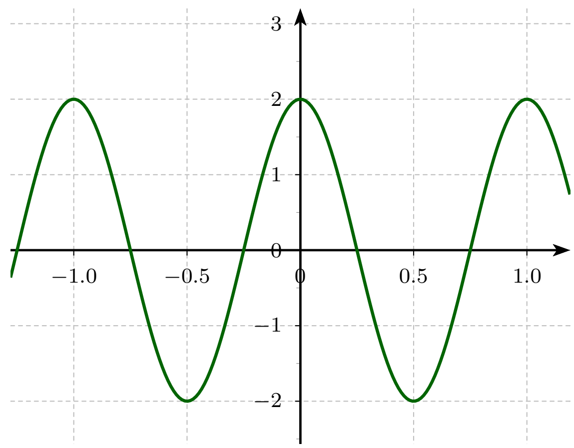
2) $t \to f(t) - 1$



3) $t \to \dfrac{3}{2} f\left(t + \dfrac{1}{4}\right)$



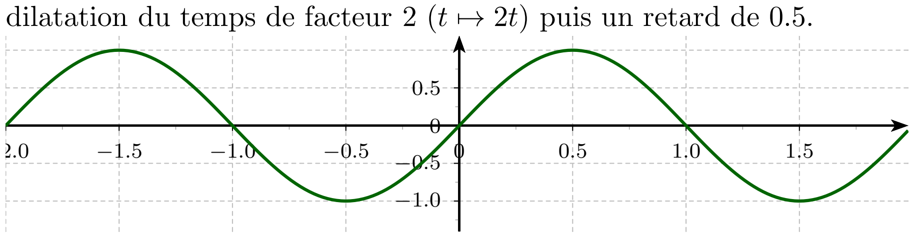
4) $t \to f\left(\frac{1}{2}t\right)$



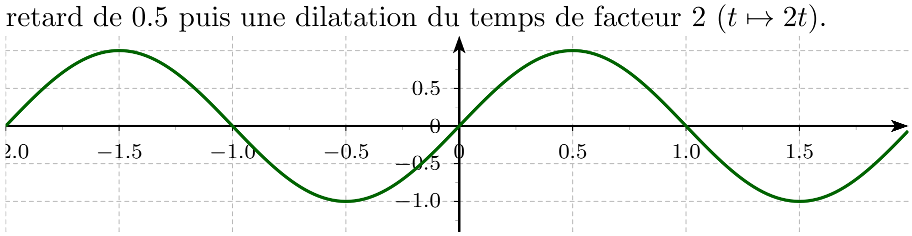
Exercice 8

On a représenté sur les deux graphiques ci-dessous la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$.

1. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction , une dilatation du temps de facteur 2 ($t \mapsto 2t$) puis un retard de 0.5.



2. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction sinus, un retard de 0.5 puis une dilatation du temps de facteur 2 ($t \mapsto 2t$).

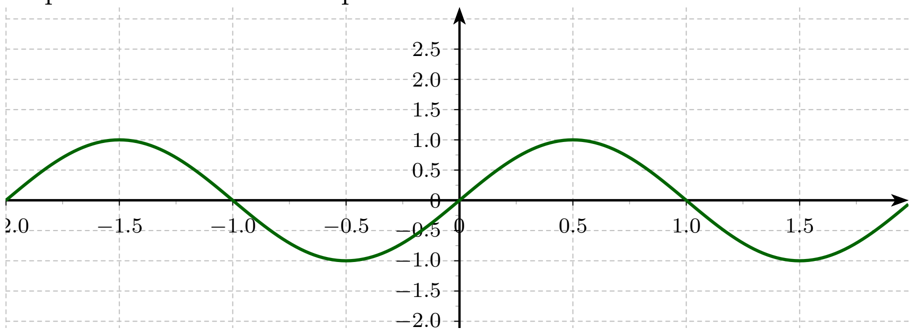


3. Dans chacun des cas, donner l'expression analytique de la fonction obtenue à l'issu des transformations.

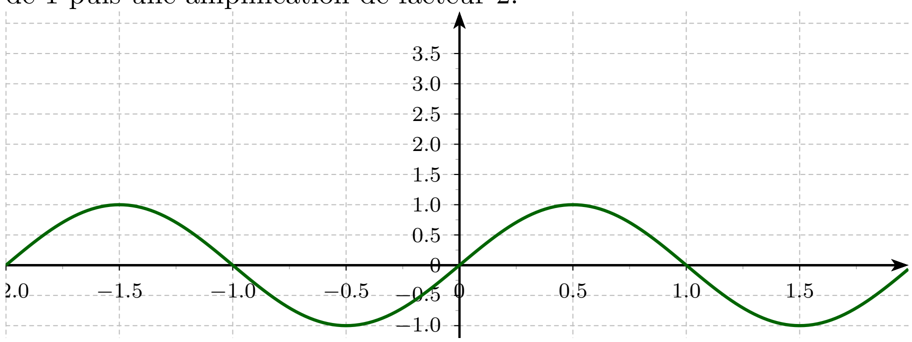
Exercice 9

On a représenté sur les deux graphiques ci-dessous la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$.

1. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction une amplification de facteur 2 puis un offset de 1.



2. Sur le graphique suivant, représenter la fonction obtenue lorsque l'on applique à la fonction un offset de 1 puis une amplification de facteur 2.

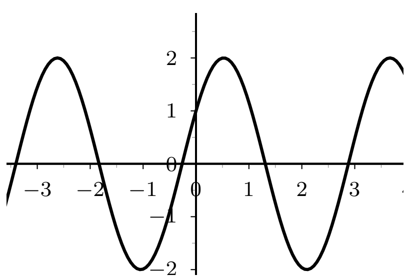


3. Dans chacun des cas, donner l'expression analytique de la fonction obtenue à l'issu des transformations.

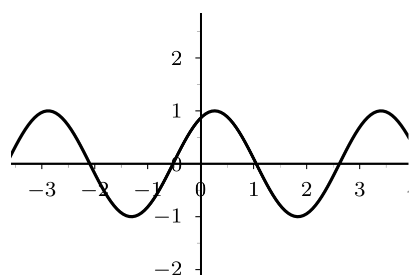
Exercice 10

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$.

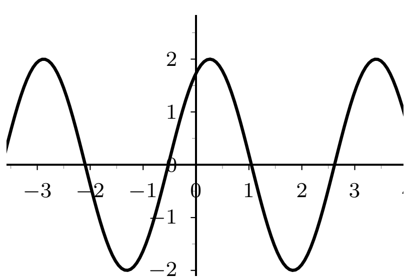
1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$
2. Déterminer la période et l'amplitude de la fonction f.
3. Parmi les courbes suivantes, dire celle qui est la représentation graphique de f, en justifiant.



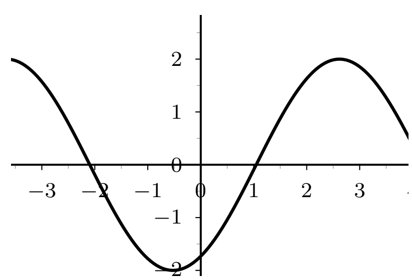
(a)



(c)



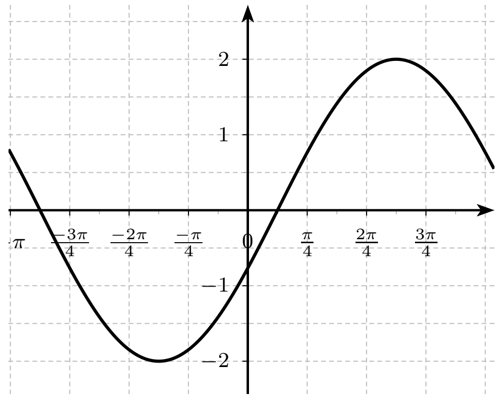
(b)



(d)

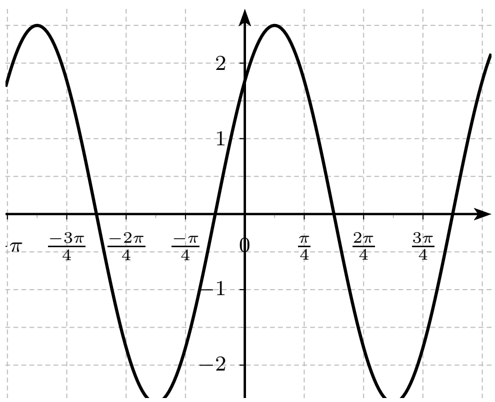
Exercice 11

1. La fonctions ci-dessous est un sinus amplifié et déphasé : $f(t) = A\sin(t+\varphi)$.
   Déterminer les valeurs de A et de φ.

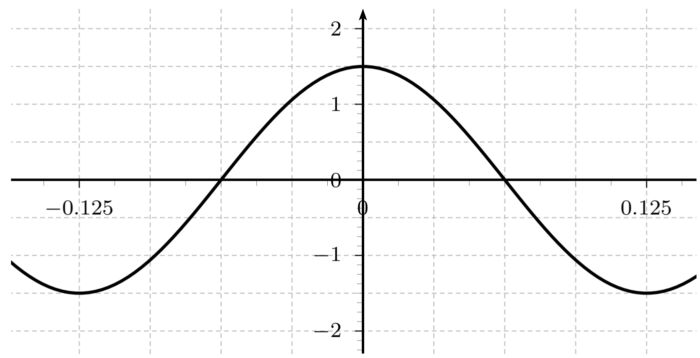


2. Les fonctions ci-dessous sont des sinus amplifiés, déphasés et de fréquence modifiée de la forme : $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$. Déterminer A, ω et φ.

(a)

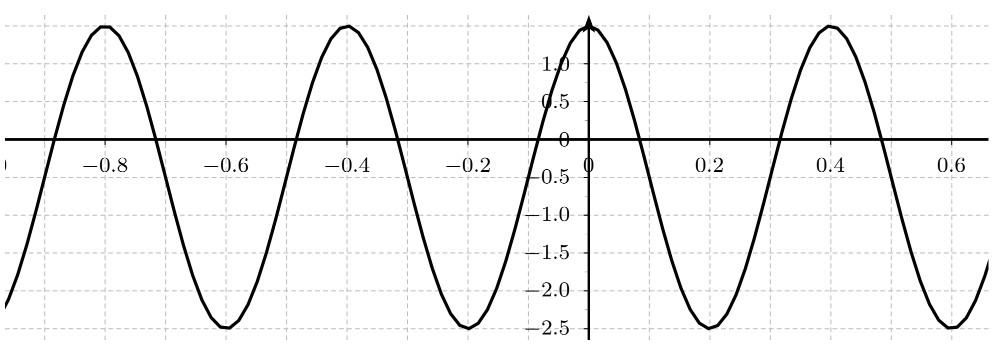


(b)



Exercice 12

On considère la fonction f suivante :

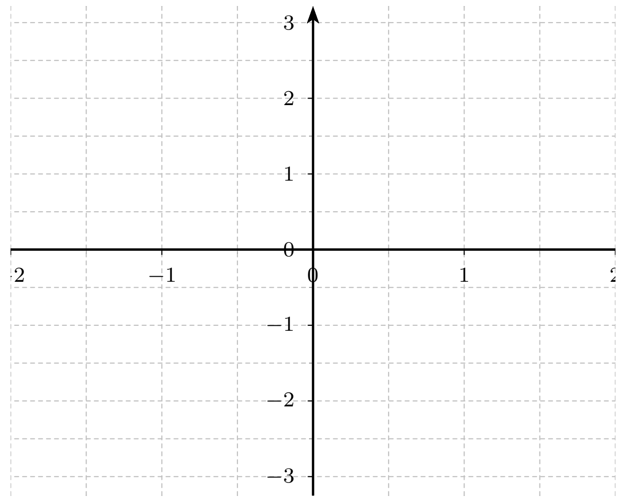


En supposant que le signal d'origine est un sinus : $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)+C$, déterminer par lecture graphique :

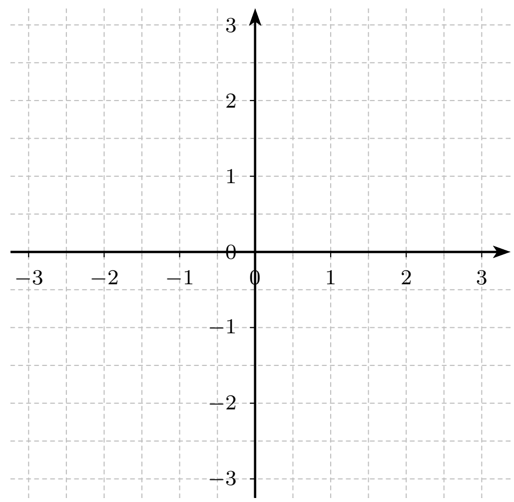
1. l'amplitude de f,
2. la période et la pulsation de f,
3. l'offset C de f,
4. le déphasage φ de f par rapport au sinus,
5. l'expression de $f(t)$.

Exercice 13 Tracer, en justifiant votre démarche, les courbes représentatives des fonctions :

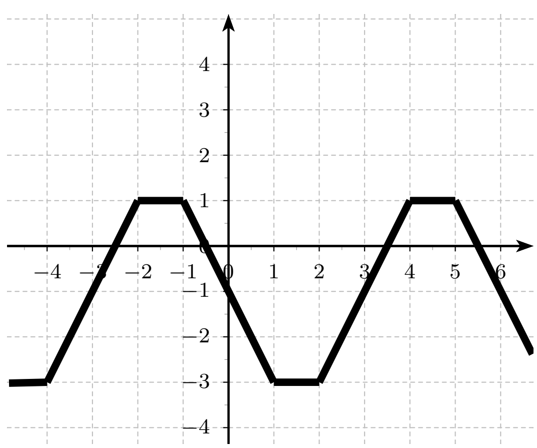
1. $f_1(t) = 1,5\sin\left(\pi(t+1)\right)$,



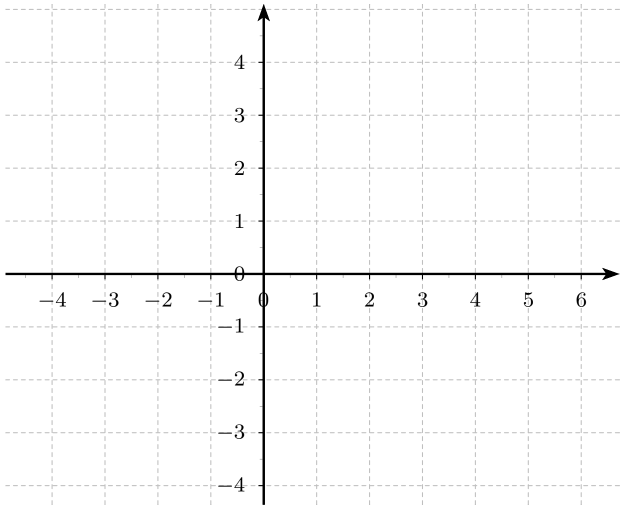
2. $f_2(t) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.



Exercice 14 Voici le graphe d'une fonction périodique f :

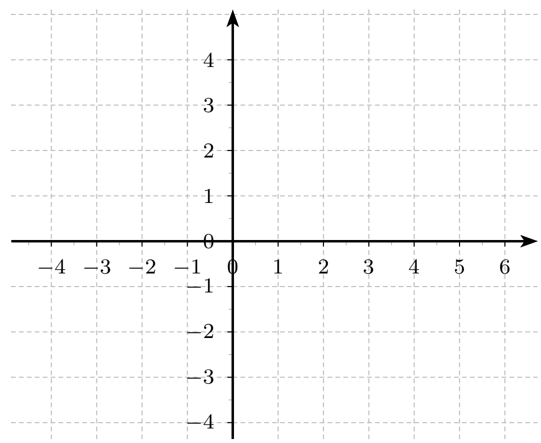


1. Déterminer la parité et la période de f.
2. Représenter sur le graphique ci-dessous (en justifiant votre démarche) les courbes représentatives de $g(t) = -f(2t)$ et $h(t) = f(t+1) - 1$



3. Déterminer la période de la fonction $g(t) = f(32t+1) + f(48t)$

4. (a) Déterminer a et b pour que la fonction $p(t) = f(t+a) + b$ soit paire.

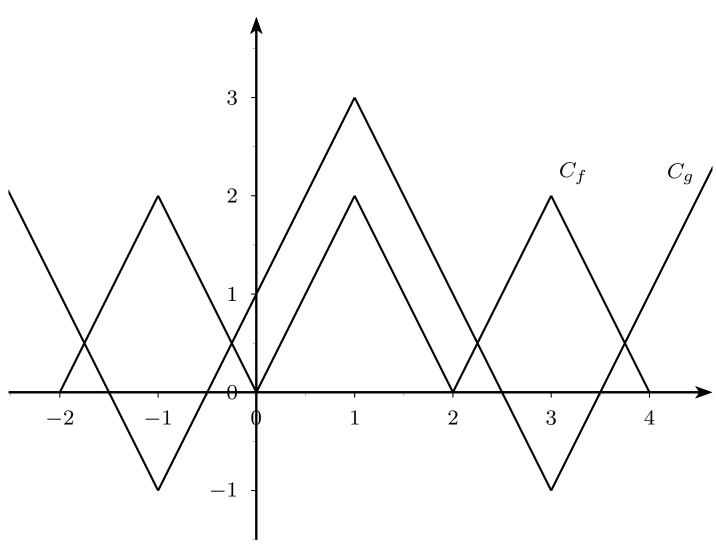


   (b) Représenter p sur le graphique ci-contre.

5. Déterminer c et d pour que la fonction $m(t) = f(t+c) + d$ soit impaire.

Exercice 15

Soient les fonctions périodiques f et g dont les courbes représentatives sont :



Déterminer les constantes a, b, c et d telles que $g(t) = af(bt+c) + d$.

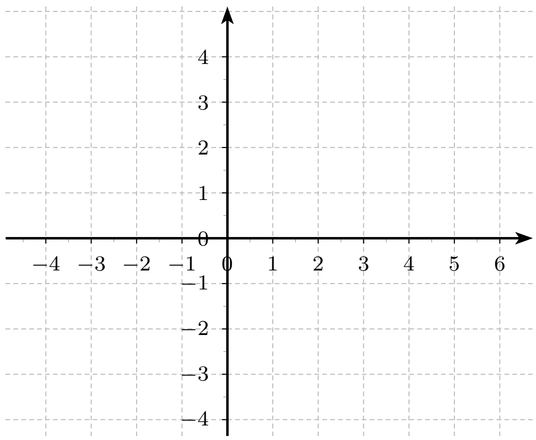
Compléments

Exercice 16

1. On définit la fonction créneau unité par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

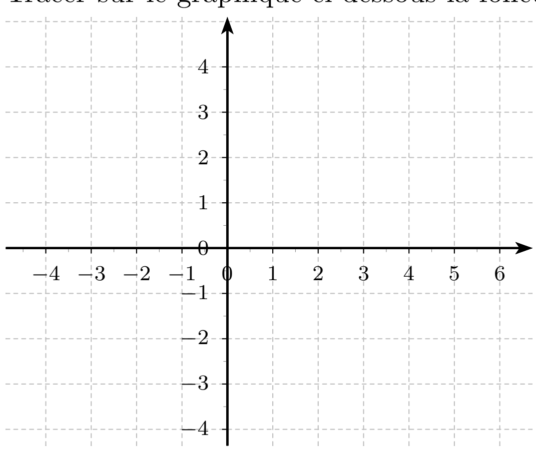
Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Pi(t-3)$



2. On définit la fonction triangle par :

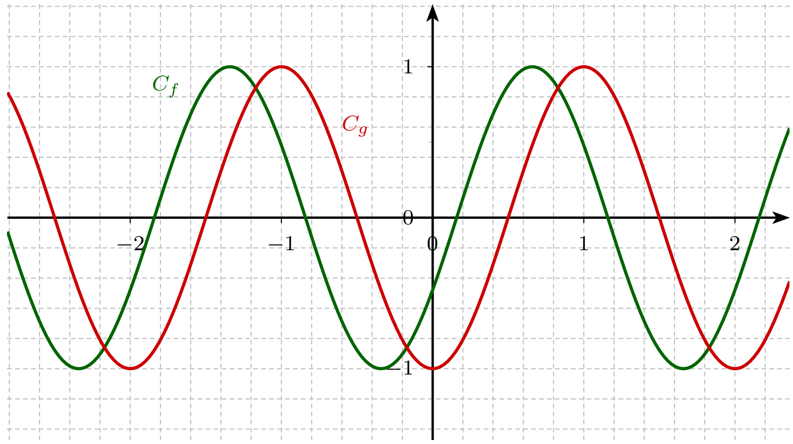
$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in]-1, 0] \\ -t+1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction $g(t) = \Lambda(2t-1) - 3$



Exercice 17 Les questions suivantes sont indépendantes.

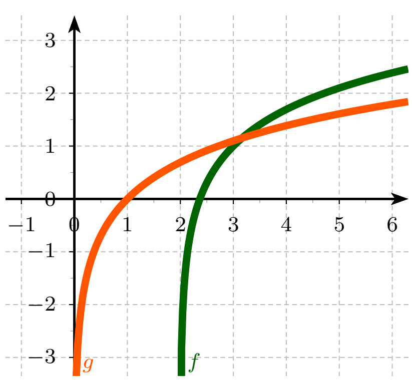
1. Sur le graphique ci-dessous, quelle courbe représente la fonction $t \mapsto \sin\left(\pi t - \frac{1}{2}\right)$?



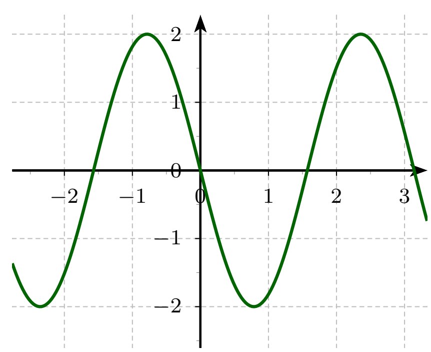
2. Déterminer la période des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = -2\cos(t) + 1$
   (b) $f_2(t) = \sin(2t)$
3. La fonction f est une fonction T périodique. Déterminer, en fonction de T, la période de la fonction g définie par
$$g(t) = 5f\left(\frac{1}{4}t\right) - f\left(\frac{1}{6}t + 1\right)$$
4. Déterminer la période, l'amplitude et le déphasage par rapport au sinus de la fonction
$$f_3(t) = \sqrt{3}\cos(4t) - \sin(4t)$$

Exercice 18

1. Déterminer les constantes a et b (justifier soigneusement votre démarche) pour que
$$g(t) = f(t+a) + b$$



2. Déterminer les constantes A, B et C (justifier soigneusement votre démarche) pour que
$$h(t) = A\sin(Bt + C)$$



Exercice 19 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes

1. Donner (en justifiant !) la période des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(x) = -3\cos(12x + \pi) + 5$

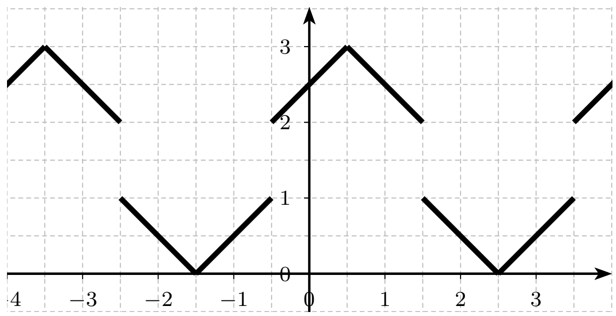
(b) $f_2(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

2. Montrer que la fonction $f_3(t) = (\cos(2t))^2$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.
3. Donner (en justifiant) la parité des fonctions suivantes :

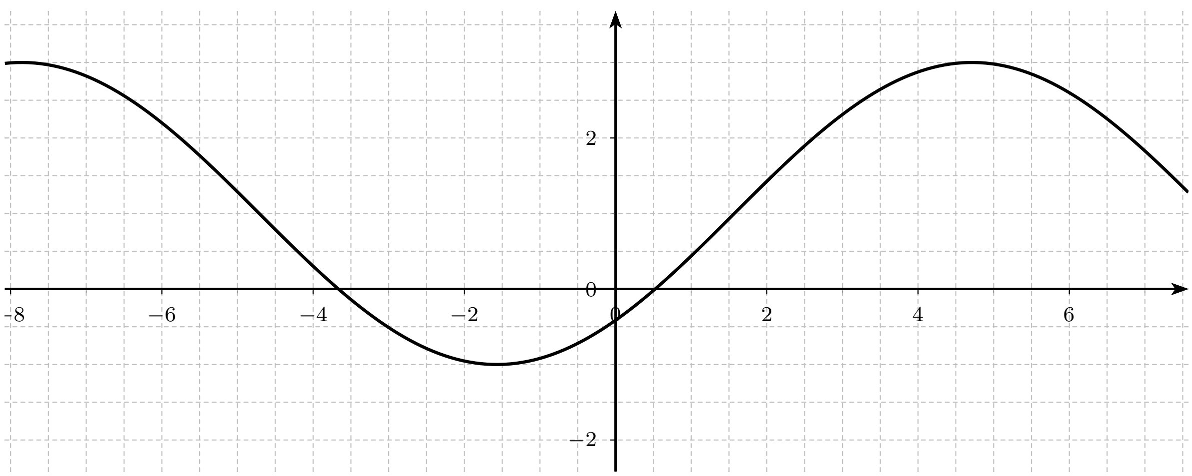
(a) $f_4(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$

(b) $f_5(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

(c) f_6 est la fonction dont le graphe est



Exercice 20 Sur le graphique ci-dessous nous avons tracer la courbe de la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$.



1. Donner les noms utilisés en génie électrique pour les 4 constantes : A, ω, φ et C.
2. Déterminer, en justifiant la démarche, les valeurs de A, ω, φ et C.
3. Vérifier votre résultat en calculant $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ avec la fonction que vous avez obtenue à la Q2.

Chapitre 6

Nombres Complexes

Exercice 1 Simplifier les expressions :

1. $A = \left(e^4 \times e^{-2}\right)^2$
2. $B = e^8 \times \dfrac{\left(e^{-3}\right)^3}{e^4 \times \dfrac{1}{e^{-3}}}$
3. $C = \sqrt{e^{3x} \times e^{9x}}$
4. $D = (e^{5x} - e^{-2x})(e^{5x} + e^{-2x})$

Exercice 2 Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + 4i$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$z_3 = z_1 + z_2$ $\qquad$ $z_4 = z_1 * z_2$ $\qquad$ $z_5 = z_1^2$ $\qquad$ $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 3

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$z_1 = \sqrt{3} + i$

$z_2 = \dfrac{z_1^2}{2}$

$z_3 = \dfrac{4}{z_2}$

$z_4 = \dfrac{z_1}{z_3}$

$z_5 = z_1 \times \overline{z_1}$

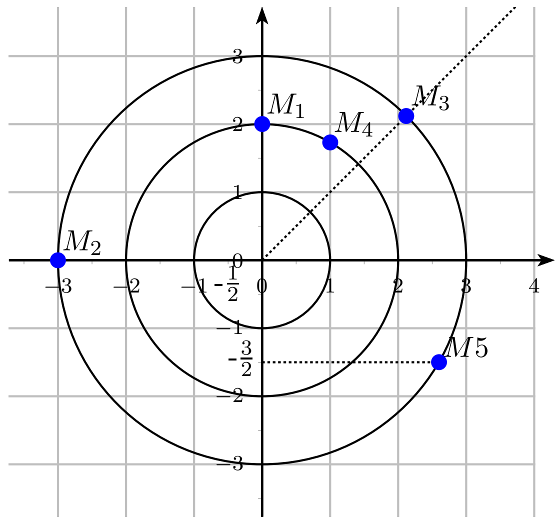
Exercice 4

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

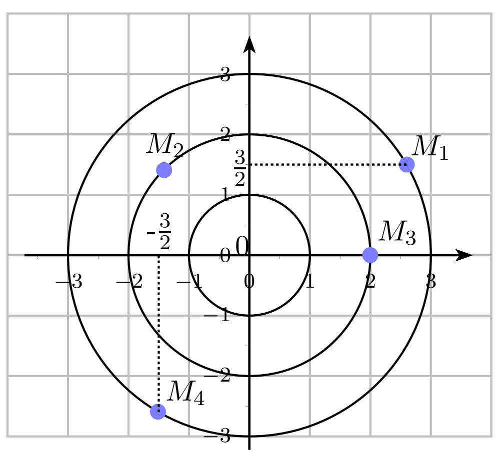
1. $z_1 = \dfrac{1}{i}$
2. $z_2 = \dfrac{3 - 2i}{i}$
3. $z_3 = (2 - 3i)^3$
4. $z_4 = \dfrac{3 - 4i}{i - 1}$
5. $z_5 = i^5 - (2i)^4 + 3(-i)^3 - 5i^2 + 1$
6. $z_6 = (2 + i)(1 - 3i)(i - 5)$

Exercice 5

Donner les affixes des points M_i du dessin ci-dessous (sous forme algébrique et exponentielle) :



Exercice 6



1. Donner les affixes des points M_i.

2. Placer le plus précisément possible les points d'affixes : $z_5 = \sqrt{2}e^{7i\pi}$ et $z_6 = -e^{23i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 7

1. Pour chacun des nombres complexes suivants, calculer la tangente de l'argument puis en déduire la valeur de l'argument :

   (a) $Z_1 = 1 + i$ (b) $Z_2 = -1 + i$ (c) $Z_3 = -1 - i$

2. Donner une formule, utilisant arctan, pour l'argument de $z = a + ib$ selon si $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$.
3. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants (en utilisant arctan) :

(a) $z_1 = 1 + jRC\omega$

(b) $z_2 = \dfrac{\frac{\omega}{\omega_0} j}{-1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$

(c) $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{R + \frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jRC\omega}}$

Indication : Les constantes de la question sont toutes positives.

Exercice 8

Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7e^{i\pi}$
2. $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$
3. $z_3 = \frac{5}{2}e^{-7i\frac{\pi}{6}}$
4. $z_4 = -\frac{1}{2}$
5. $z_5 = \frac{1}{i}$
6. $z_6 = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$
7. $z_7 = -4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
8. $z_8 = e^{i+1}$
9. $z_9 = \sum_{k=1}^{6} i^k$
10. $z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 7e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 9

Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i)$
2. $z_2 = \frac{3i}{5}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2-2i)$
3. $z_3 = (1+i)^2 + (1-i)^2$
4. $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2(1-i)}$
5. $z_5 = (1+i)^9$
6. $z_6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$
7. $z_7 = (1+i\sqrt{3})^{2021}$

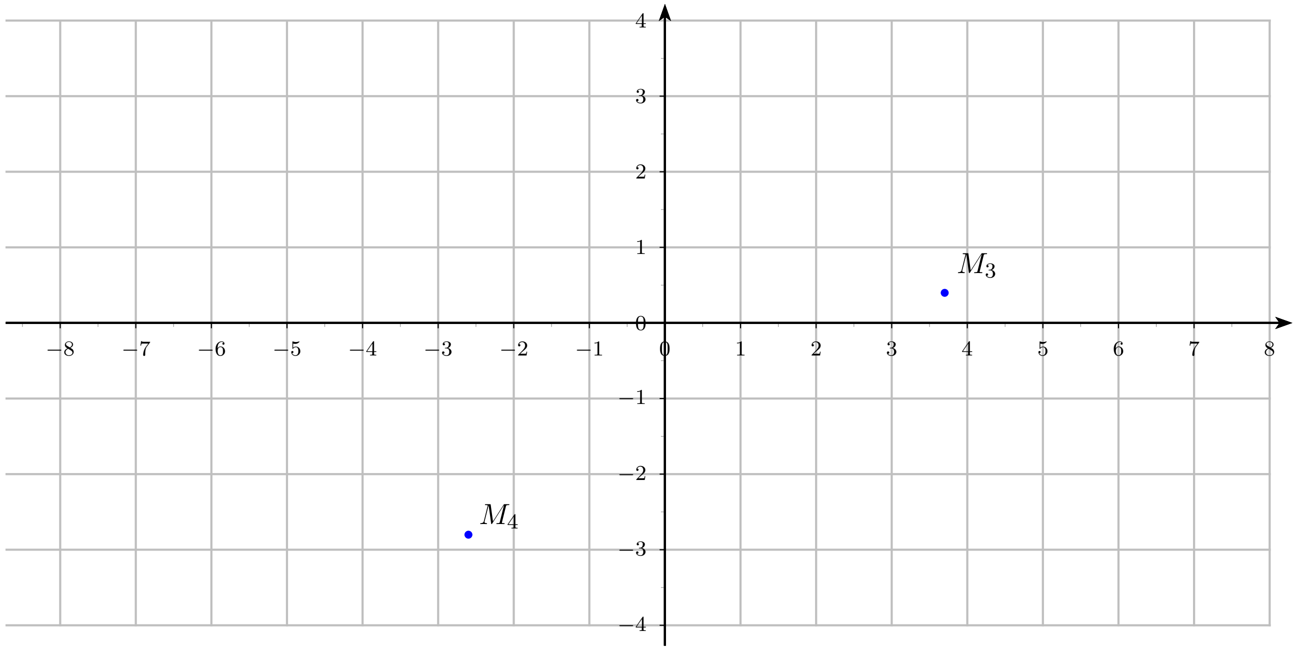
Exercice 10

1. Déterminer le module et l'argument de $Z = 17e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. Déterminer le module et l'argument de $Z = \dfrac{-R}{-1+i}$ avec $R \in]0; +\infty[$
3. Déterminer le module et l'argument de $Z = \dfrac{1}{1+jL\omega} \times \dfrac{1+jRC\omega}{jRC\omega}$ avec R, L, C et ω des réels positifs.
4. Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

   (a) $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$

   (b) $Z_2 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5. Sur le graphique ci-dessous, les points M_3 et M_4 sont les points d'affixes Z_3 et Z_4. Placer le plus précisément possible (en justifiant la démarche) les points d'affixe : $\overline{Z_4}$, $i \times Z_3$, $Z_3 + Z_4$ et $-\frac{1}{2} \times Z_3$.



Exercice 11

Soit $\theta \in [0, \pi[$.

1. Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. En déduire la partie réelle et imaginaire, le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$.

Exercice 12

Soient $Z_1 = r_1 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_2 = r_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ deux nombres complexes dont on ne connaît pas les modules. Déterminer si possible les valeurs des arguments des nombres :

1. $-3Z_1$
2. $\overline{Z_2}$
3. iZ_1
4. $Z_1 + Z_2$
5. $Z_1 Z_2$
6. $\dfrac{Z_2}{Z_1}$
7. Z_1^7

Exercice 13

Soient $Z_1 = 5e^{i\theta_1}$ et $Z_2 = 7e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes dont on ne connaît pas les arguments. Déterminer si possible les valeurs des modules des nombres :

1. $-3Z_1$
2. $\overline{Z_2}$
3. iZ_1
4. $Z_1 + Z_2$
5. $Z_1 Z_2$
6. $\dfrac{Z_2}{Z_1}$
7. Z_1^7

Exercice 14

Linéariser chacune des expressions suivantes :

1. $\cos(2x)\sin(3x)$
2. $\cos(4t)\cos(7t)$
3. $\cos^3(2x)$
4. $\cos(x)\sin^2(x)$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $2z^2 + 5z + 2 = 0$
2. $z^2 + 3z + 5 = 0$
3. $4z^2 - 7z = 0$
4. $z^2 + 4z + 4 = 0$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $3z + i + 2 = 2i - z$
2. $\dfrac{1}{z+2} = 3i$
3. $(z - 2i + 1)(2z + i) = 0$
4. $\dfrac{z - 3 + 4i}{(z+2)(z-4i)} = 0$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 + 8 = 0$
3. $z^2 + 4z + 7 = 0$

Exercice 18

1. On considère l'équation
$$2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$$
Le nombre complexe $z = i$ est il solution ?
2. On considère l'équation
$$z^2 - z - 3iz + i - 1 = 0$$
Le nombre complexe $z = 1 + 2i$ est il solution ?

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + (2-i)z - 2i = 0$
2. $z^2 + 2z + 1 + i = 0$
3. $z^2 - (3+2i)z + (1+3i) = 0$
4. $z^2 - 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0.$

Compléments

Exercice 20

1. Trois dipoles d'impédances complexes respectives $\underline{Z_1} = 75 - 50j$, $\underline{Z_2} = 50 + 50j$ et $\underline{Z_3} = 100 - 25j$.
   (a) Quelle est l'impédance du dipôle équivalent si on monte les dipôles en série ?
   (b) Quelle est l'impédance du dipôle équivalent si on monte les dipôles en parallèles ?
2. L'impédance complexe d'un circuit est telle que
$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}}$$
Sachant que $\underline{Z_1} = 1 + 2j$, $\underline{Z_2} = -1 + 3j$, $\underline{Z_3} = 4 + 5j$, calculer l'impédance du circuit.

Exercice 21

1. On considère un dipôle formée d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine L montés en série. Le signal d'entrée est de pulsation ω.
   (a) Déterminer l'impédance complexe équivalente.
   (b) Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 20\Omega$, $L = 2.5H$, $C = 210\mu F$ et $\omega = 10\pi$.
2. On considère un dipôle formée d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine L montés en parallèle. Le signal d'entrée est de pulsation ω.
   (a) Déterminer l'impédance complexe équivalente.
   (b) Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 20\Omega$, $L = 2.5H$, $C = 210\mu F$ et $\omega = 10\pi$.

Exercice 22

1. Donner un exemple de nombre complexe Z qui vérifie simultanément les 4 propriétés suivantes :

$$|Z| < 2, \qquad Re(Z) > 1, \qquad Im(Z) < 1, \qquad arg(Z) \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$$

2. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :
   (a) Il n'existe pas de nombre complexe z tel que : $\overline{z} = z$
   (b) Pour tout complexe z on a $arg(iz) = arg(z) + \pi$

Exercice 23

1. Déterminer la partie réelle et imaginaire, le module et l'argument de $1 + i\tan\left(\frac{\pi}{18}\right)$.
2. Généraliser la question précédente et donner le module et l'argument de $1 + i\tan(\varphi)$pour $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \dfrac{1 + i\tan\varphi}{1 - i\tan\varphi}$.

Exercice 24

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

1. $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$
2. $Z_2 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$
3. $Z_3 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
4. $Z_4 = \left(5 + 5\sqrt{3}i\right)^3$

Exercice 25 ***Extrait de DS 2019***

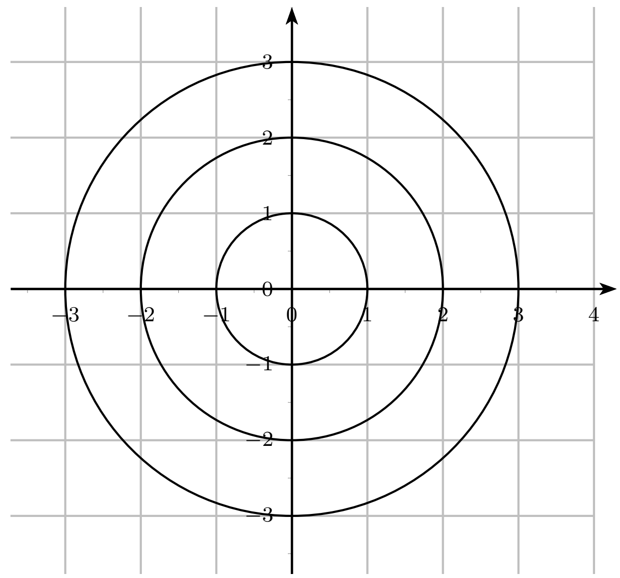
1. Déterminer le module de :
   (a) $Z_1 = \dfrac{1-7i}{3+i}$
   (b) $Z_2 = (2-i)^3$
2. Déterminer l'argument de :
   (a) $Z_4 = -2i(i - \sqrt{3})$
   (b) $Z_5 = \dfrac{-3e^{i\frac{\pi}{6}}}{5e^{i\frac{\pi}{4}}}$
   (c) $Z_6 = \dfrac{-R}{-1+i}$ avec $R \in]0; +\infty[$

3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$Z_7 = \left(e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-2i\pi}\right)$$

4. Placer précisemment les points d'affixe Z_8, Z_9 et Z_{10}

   (a) $Z_9 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$
   (b) $Z_8 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$
   (c) $Z_{10} = \dfrac{1}{i}$



5. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler :

$$f(t) = \sin(3t)\sin(5t)$$

Exercice 26 ***Extrait de DS 2019***

1. Vérifier que i est solution de l'équation suivante :

$$2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$$

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $Z^2 + 2Z + 37 = 0$
   (b) $2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$

Chapitre 7

Rappels : Étude de fonctions

Exercice 1 ***Limite en*** ∞

Calculer les limites des fonctions suivantes en $-\infty$ ou $+\infty$

1. $f(t) = t^2 + 3t - 1$ en $+\infty$
2. $f(t) = t^3 - 3t^2 - 2t - 5$ en $+\infty$
3. $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{t+1}$ en $-\infty$
4. $f(t) = \dfrac{t^2 + 4t - 6}{3t^2 + 10t}$ en $-\infty$
5. $f(t) = \dfrac{1}{3t^2} + \dfrac{2}{t} - 4$ en $-\infty$
6. $f(t) = \ln(2t^2 - 3)$ en $+\infty$
7. $f(t) = \ln\left(\frac{2}{t+3}\right)$ en $+\infty$
8. $f(t) = e^{\frac{1}{t} - 3}$ en $+\infty$
9. $f(t) = e^{3t^2 + t - 1}$ en $+\infty$
10. $f(t) = \dfrac{e^{3t-1}}{e^{2t+2}}$ en $+\infty$

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^2+5x-3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^3+1}{x-2}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(3x^2+1\right) - 2\ln(x+1)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3-x^2-2x}{x^2+3x+2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{x^2+7x-10}{x^2+4x+3}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2+5x-12}{-x^2-2x+8}$

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (x^2+2x)\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{10}}{e^{-2x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (x^2+1)\ln(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-2\ln(-x^3)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^3)e^{-x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + e^{3x}$

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ (b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} = -1$ (c) $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$

2. On souhaite résoudre l'équation suivante

$$(x^2-2)(x-1)(x+3) = (2x-1)(x^2+4x)$$

   (a) Existe t-il un facteur commun qui permettrait de factoriser aisément ?
   (b) Développer chaque expression de l'équation.
   (c) Résoudre.

Exercice 5

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (-3x+2)^4$
2. $f(s) = e^{-s^2+1}$
3. $f(x) = \sqrt{2x+5}$
4. $f(x) = e^{\sqrt{4x-3}}$
5. $f(t) = e^{\cos(3t)}$
6. $f(t) = \tan(2t)$

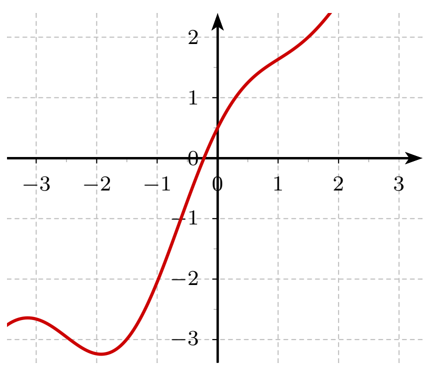
Exercice 6

Calculez la dérivée seconde des fonctions suivantes :

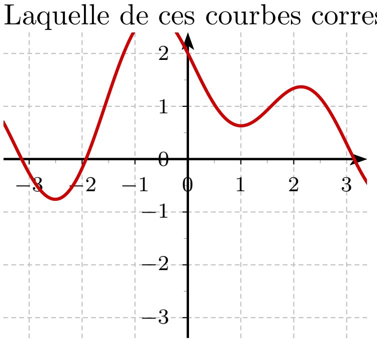
1. $f(x) = xe^{-2x}$
2. $f(x) = \ln(x^2+1)$

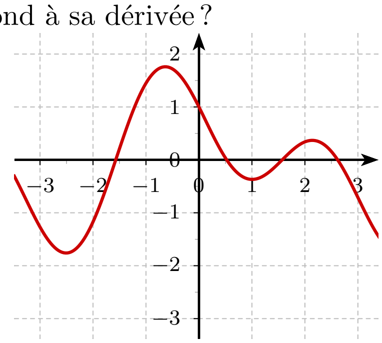
Exercice 7

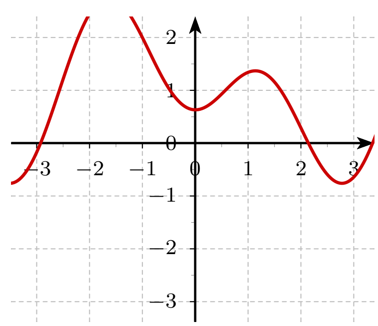
Voici le graphe d'une fonction continue et dérivable :



Laquelle de ces courbes correspond à sa dérivée ?

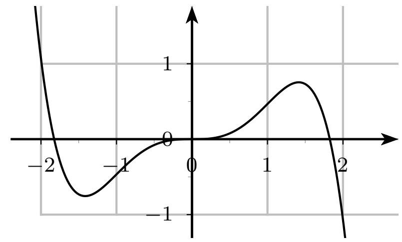




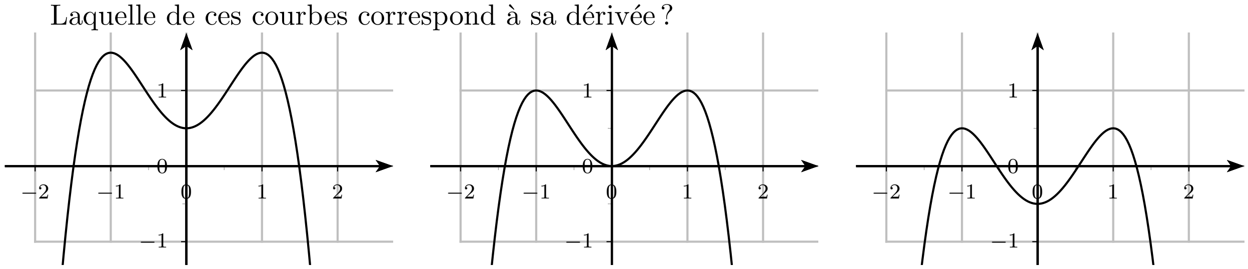


Exercice 8

Voici le graphe d'une fonction continue et dérivable :



Laquelle de ces courbes correspond à sa dérivée ?



Exercice 9

Soit la fonction définie par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x+2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis le sens de variation de f.
3. Déterminer les limites de f en -2, $-\infty$ et $+\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe et ses asymptotes.

Exercice 10

Soit la fonction définie par $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis la dérivée seconde.
3. Déterminer la sens de variation de la fonction dérivée de f.
4. En déduire le signe de f' et le sens de variation de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
6. Tracer l'allure de la courbe et sa tangente en 1.

Exercice 11

On considère la fonction $f(t) = \begin{cases} 3\left(1 - e^{-t/2}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}_*^+$ puis le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'équation de la tangente « à droite » à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure de la courbe et sa tangente en 0.

Exercice 12

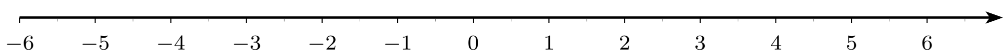
Soit la fonction définie par $f(x) = \ln\left((x-2)(3-4x)\right)$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée de f puis le sens de variation de f.
3. Déterminer la limite de f en 2.
4. Tracer l'allure de la courbe.

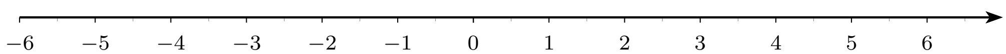
Exercice 13

1. Écrire les conditions suivantes avec un intervalle et représenter cet intervalle sur l'axe gradué :

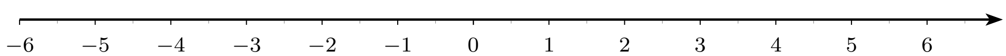
   (a) $|x| < 3$



   (b) $|x-1| < 3$



   (c) $|2x+1| \geq 3$



2. Déterminer les valeurs de x décrites par les inéquations et les représenter sur un axe :

   (a) $|x| < -5$

   (b) $|x| \geq \sqrt{2}$

   (c) $|x+2| > \dfrac{1}{2}$

   (d) $|2x-3| \leq \dfrac{1}{2}$

3. Ecrire avec une valeur absolue chacune des conditions suivantes :

   (a) $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{2}{3}$ (b) $0 \leq x \leq 5$ (c) $1 < x < 3,5$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x| = 3, \qquad |x-2| = -2, \qquad |x-2| = 5 \qquad |3-2x| = 2$$
$$|x-2| = |3-x| \qquad |3x+1| - |x-2| = 9 \qquad |t^2+t-2| = 3$$

Exercice 15

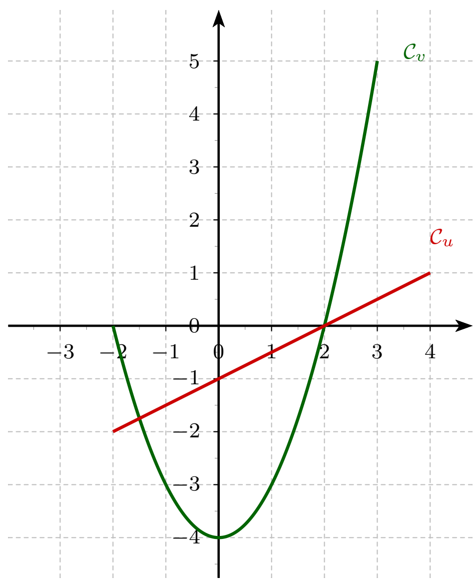
Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(t) = |2t-3|$
2. $g(x) = |x-3| + |2x+1|$
3. $h(t) = |t^2+t-2|$
4. $k(t) = |\sin(t)|$
5. $l(t) = -\left|\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right|$

Exercice 16 On considère la fonciton $f(t) = t^2 - 2$

1. Déterminer l'image de 3.
2. Déterminer le ou les antécédents de 42.
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[2; 5[$.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - 3; 0[$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - 1; 4]$.
6. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - \infty; 4]$.

Exercice 17 On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_v$ d'équation $y = v(x)$ et $\mathcal{C}_u$ d'équation $y = u(x)$



On considère que u n'est définie que sur $[-2, 4]$ et v sur $[-2, 3]$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs images prises par $u(x)$?
2. Justifier que la fonction $f = v \circ u$ est bien définie.
3. Construire les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses -2, -1, 0, 1, 2 et 4.
4. Déterminer les expressions de u et v puis de f et retrouver les résultats précédents.

Exercice 18 On considère les fonctions $f_1(x) = x^2 - 3$, $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, $g_1(x) = x - 4$, $h_1(x) = x^2 + x + 1$ et $h_2(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.

1. Donner l'expression des fonctions composées suivantes :

   (a) $g_1 \circ f_1$
   (b) $f_1 \circ g_1$
   (c) $g_1 \circ h_1$
   (d) $h_2 \circ f_1$
   (e) $h_1 \circ h_1$
   (f) $f_1 \circ g_1 \circ f_2$

2. Dans chaque cas, donner deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec u et v différent de l'identité.

   (a) $f(x) = (x-3)^2$,
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,
   (c) $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Dans chaque cas, écrire g comme la composée de trois fonctions différentes de l'identité :

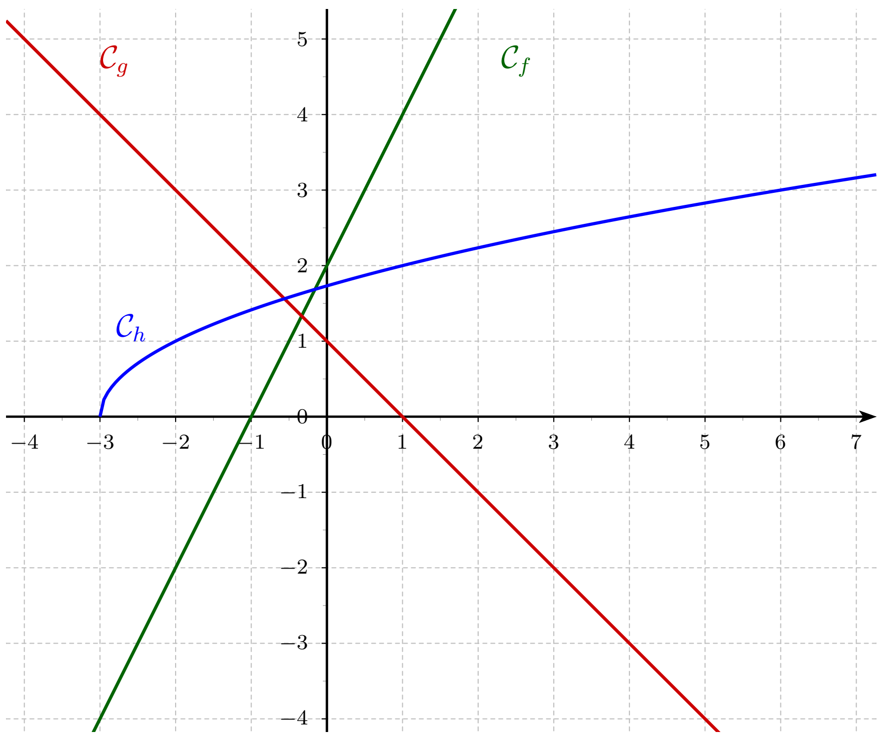
(a) $g(x) = \sqrt{x^2+3}$ (b) $g(x) = x^2+2x+3$ (c) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

Exercice 19 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par $f(x) = 2+\sqrt{3-x}$ et g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x) = 3-(x-2)^2$.

1. Montrer que pour tout $x \in [2,+\infty[$, $f \circ g(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty,3]$, $g \circ f(x) = x$.
3. Peut-on dire que dans cet exemple $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 20 ***Extrait de DS 2019***

On considère les représentations graphiques des fonctions f, g et h suivantes :



Déterminer, si possible, les valeurs de

1. $f \circ g(1)$
2. $g \circ f(1)$
3. $h \circ f(-3)$
4. $h \circ f \circ g(-1)$
5. $f \circ f(-2)$

Compléments

Exercice 21 Déterminer les limites suivantes :

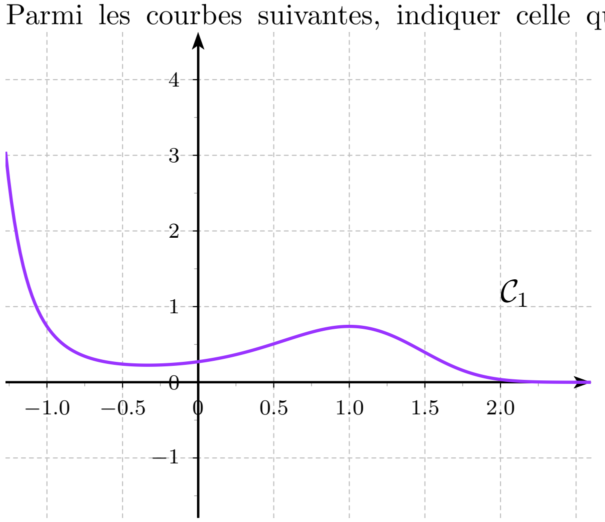
1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^{10}+1)e^{-5x}$
5. $\displaystyle\lim_{t\to 3} \frac{t^2-2t-3}{2t^2-18}$
6. $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{t^2-2t-3}{2t^2-18}$
7. $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{t^2-2t-3}{e^{t-5}}$
8. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{e^{2t+3}-e^5}{t-1}$

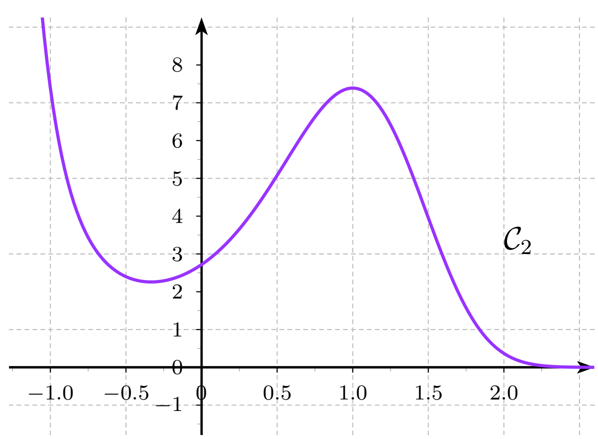
Exercice 22

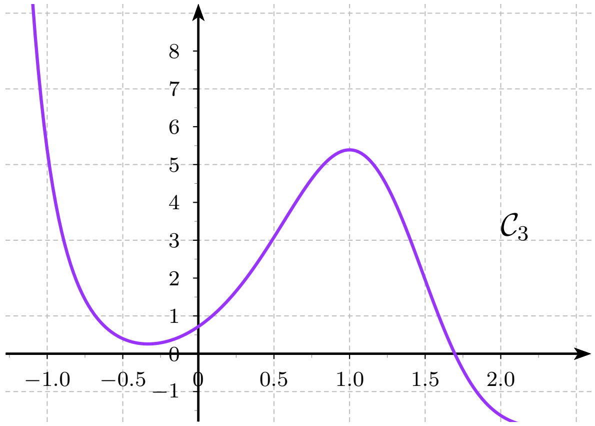
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

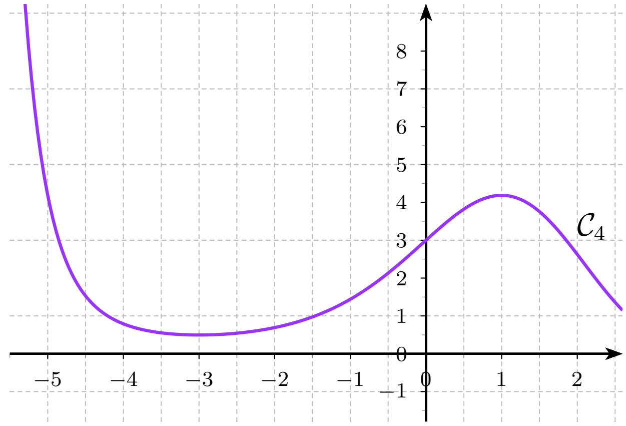
$$f(x) = e^{-x^3+x^2+x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la dérivée de f puis en déduire le sens de variation de f.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (On indiquera les valeurs des limites trouvées à la question 3 ainsi que les valeurs de f aux changements de sens de variations)
5. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui correspond à la représentation graphique de f :









Exercice 23

Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|t^3| = -1$
2. $|3-2t| = 8$
3. $|t^2-1| = 4$
4. $|t+5| < 3$
5. $|t-117| > 19$

Exercice 24 Soient les fonctions f, g et h suivantes

$$f(x) = e^{x+1} \quad g(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x} \quad h(x) = \frac{1}{3x-1}$$

1. Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $h \circ f$.
2. Montrer que, pour tout $x \neq \dfrac{1}{3}$ on a : $g \circ h(x) = x$.
3. Déterminer deux fonctions u et v (qui ne soient pas la fonction identité) telles que $g(x) = v \circ u(x)$.
4. Déterminer une fonction w telle que, pour tout $x > 0$, $f \circ w(x) = x$.

Exercice 25 ***Extrait de DS 2019***

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition et la dérivée :

1. $f(t) = \dfrac{t^3-1}{4}$
2. $g(t) = \ln(3t-1)$
3. $h(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+1}$
4. $k(t) = \cos(t^2)$

Exercice 26

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f =]-1, 1[$.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Déterminer les limites de f en -1 et en 1.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Chapitre 8

DS de l'année 2024-2025

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 20 septembre 2024 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible

1. $A = 3 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{9}\right) + 2$
2. $B = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}}$
3. $C = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1}$

Exercice 2 Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et b l'entier plus petit possible.*

1. $D = \sqrt{25 + 144}$
2. $E = \sqrt{450} - 4\sqrt{98}$
3. $F = \sqrt{\frac{700}{256}}$
4. $G = \left(\sqrt{2} - \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{18} + \sqrt{3}\right)$

Exercice 3 Ecrire sous forme d'une puissance de 10

1. $H = 10^5 \times \dfrac{1}{10^3 \times (10^{-3} \times 10000)^2}$
2. $I = \dfrac{2^7 \times 10^{-3} \times 5^4}{10^{-4} \times 2^3 \times 0,01}$

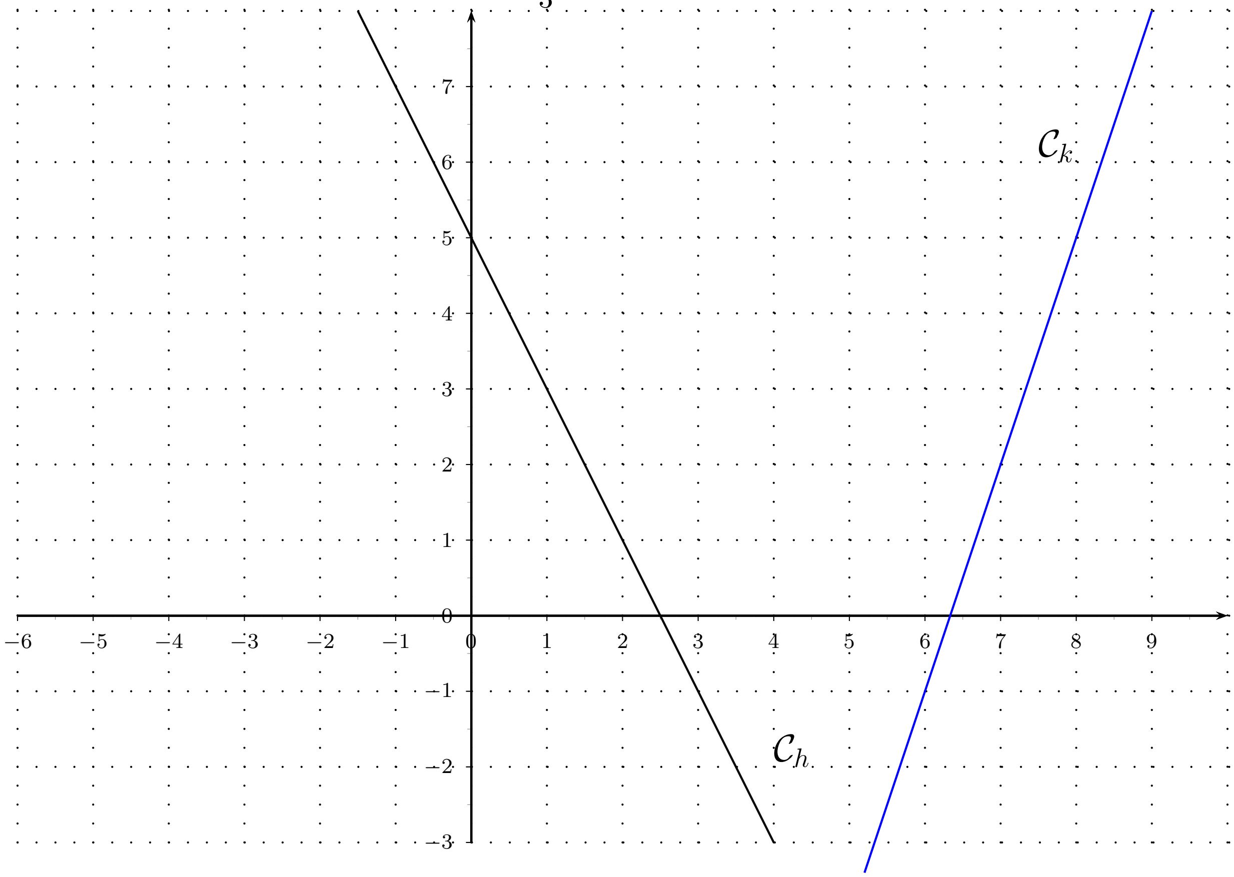
Exercice 4

1. Résoudre
   (a) $-3(4 - 2x) = 8x + 7$
   (b) $\dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{4}{5}$
2. Déterminer a en fonction de R, x et C : $\dfrac{\frac{a}{R} + \frac{C}{x}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{x}} = 0$

Exercice 5

1. Tracer, sur le graphe ci-dessous, les droites représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = 2x - 1$, (b) $g(x) = -\dfrac{2x-6}{3}$,



2. Donner les équations de chacune des droites h et k du graphique ci-dessus.

Exercice 6

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = 3t\sin(2t+3)$

   (b) $g(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$

   (c) $U(i) = R$

   (d) $s(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

   (e) $v(t) = \ln(2-7t)$

2. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions :

   (a) $f(t) = \dfrac{3}{t+6}$

   (b) $U(i) = Ri$

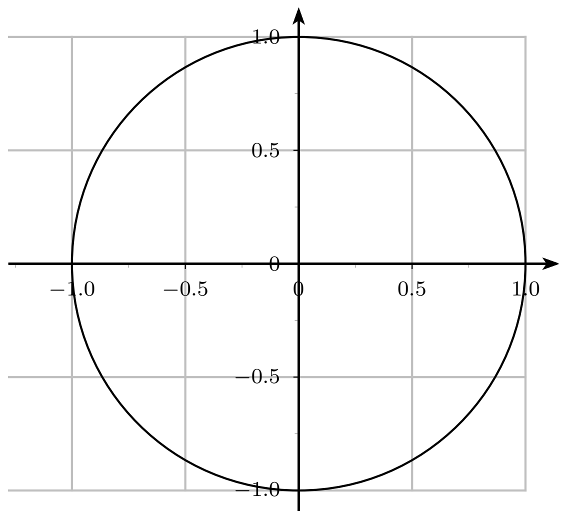
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 11 octobre 2024 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Pour chacun des angles, donner la mesure principale puis placer très précisément le point représentatif sur le cercle trigonométrique : $\theta_1 = \dfrac{292\pi}{3}$, $\theta_2 = \dfrac{-35\pi}{6}$ et $\theta_3 = \dfrac{364\pi}{16}$.

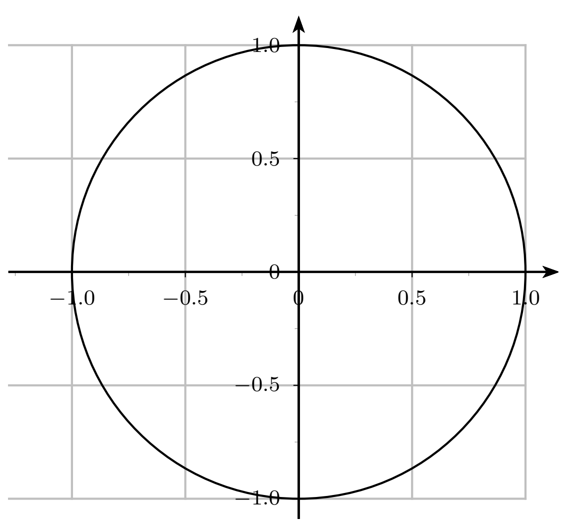


2. Donner, sans justifier, les valeurs de :

(a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ (b) $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)$ (c) $\tan\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)$

3. Représenter sur le cercle trigonométrique les angles x qui vérifient les 2 conditions ci-dessous puis écrire l'intervalle des solutions appartenant à $[0; 2\pi]$:

$$\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \textbf{ et } \sin(x) \leq \frac{1}{2}$$



Exercice 2 Les questions 1 à 4 suivantes sont indépendantes.

1. Mettre sous la forme $A\sin(\omega t - \varphi)$, avec $A > 0$, l'expression $s(t) = -7\cos(3t) + 7\sin(3t)$.
2. Donner l'ensemble des nombres de $]-\pi;\pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$
3. Soit θ un angle tel que : $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(\theta) = \dfrac{5}{13}$. Donner la valeur exacte de $\cos(\theta)$.
4. Résoudre sur $[0;2\pi[$: $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Soient a et b deux réels : $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(2x) = 2\cos(x)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k(k+1) = 70$

Exercice 4 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Donner la contraposée de : « Si tu échoues à ton diplome, tu ne partiras pas en vacances »
2. On considère la propriété $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$.
   (a) Donner la négation de P_1.
   (b) La propriété P_1 est elle vraie ?
   (c) La propriété non-P_1 est elle vraie ?
3. Ecrire avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} + \ldots + \dfrac{40}{41}$
   (b) $S_2 = 6 + 9 + 12 + \ldots + 90$

Exercice 5 Déterminer (en expliquant le calcul ou la démarche) :

1. $\arctan(-\sqrt{3})$
2. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
3. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\tan(\arctan(3))$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 22 novembre 2024 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. (a) Mettre la fonction $f_1(t) = -4\sqrt{3}\cos(2t) + 4\sin(2t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$
   (b) Déterminer la période et l'amplitude de f_1.
2. On rappelle que, pour tout réels a et b on a : $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.
   A l'aide de cette formule, déterminer la période de la fonction. $f_2(t) = \sin(27\pi t)\sin(3\pi t)$
3. Déterminer la période des fonctions suivantes :

   (a) $f_3(t) = -2\sin\left(\frac{t}{4}\right)$

   (b) $f_4(t) = \cos\left(100\pi(t + 0.01)\right) + 1$

Exercice 2

1. Parmi les équations différentielles suivantes, dire celles qui sont homogènes, celles qui sont linéaires, celles qui sont d'ordre 1 et celles qui sont à coefficients constants.

   (a) $ty'(t) + y(t) = -10\cos(5t)$

   (b) $y'(t) \times y(t) = 0$

   (c) $y'(t) - 7y(t) + t^2 = 0$

   (d) $y''(t) - y(t) = 0$

2. La fonction $f(t) = \cos(5t) - \sin(5t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$y'(t) - 5y(t) = -10\cos(5t)$$

3. Donner une équation différentielle, linéaire, homogène admettant $g(t) = 3e^{-4t}$ comme solution.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} 3y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'(t) - 5y(t) = 7e^{3t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

3. $(3t+1)y'(t) - y(t) = 0$

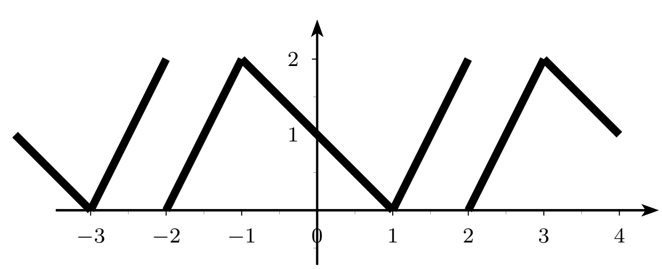
Exercice 4

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(t) = -4$

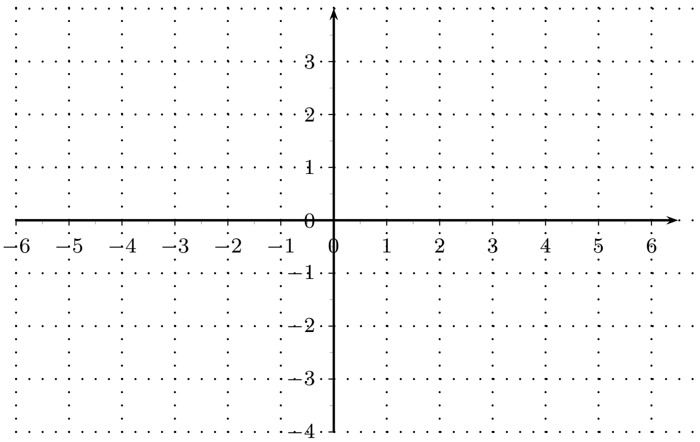
   (b) $f_2(t) = t^5 + 6t^3 - 8t$

   (c)



2. Tracer sur l'intervalle $[-6, 6]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant toutes les propriétés suivantes :

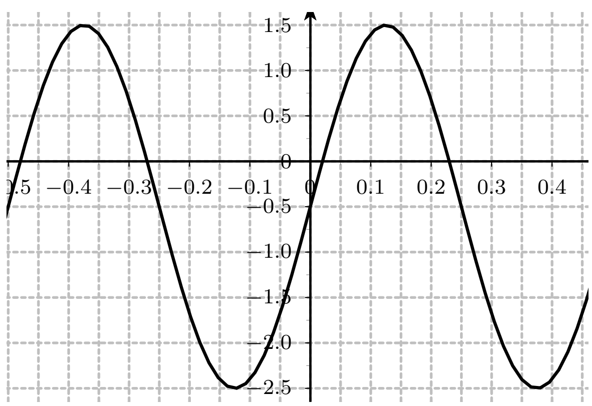
$$\begin{cases} f(t) = \frac{4}{3}t - 2 \text{ sur } [0, 3] \\ f \text{ est impaire} \\ f \text{ est 6-périodique} \end{cases}$$



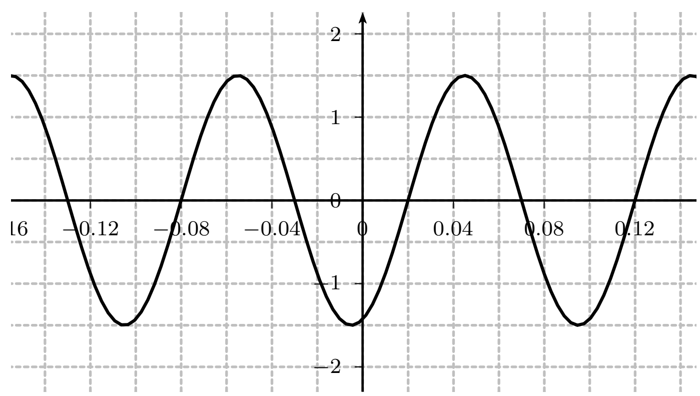
Exercice 5

1. Les deux fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$. Déterminer dans chaque cas les valeurs de A, ω, φ et C

(a)



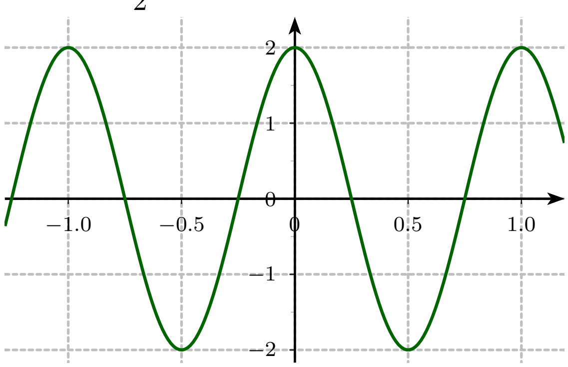
(b)

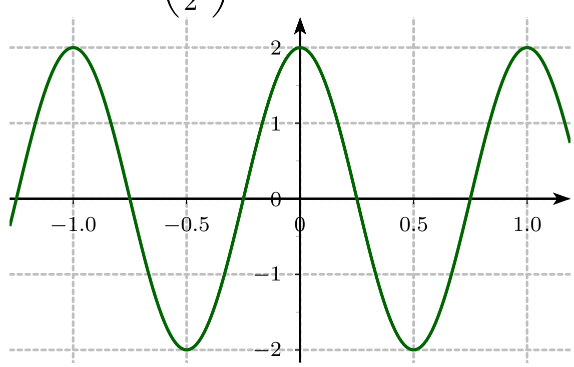


2. On a représenté la fonction $f(t) = 2\cos(2\pi t)$ sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors sur chaque graphiqe f_1 et f_2 :

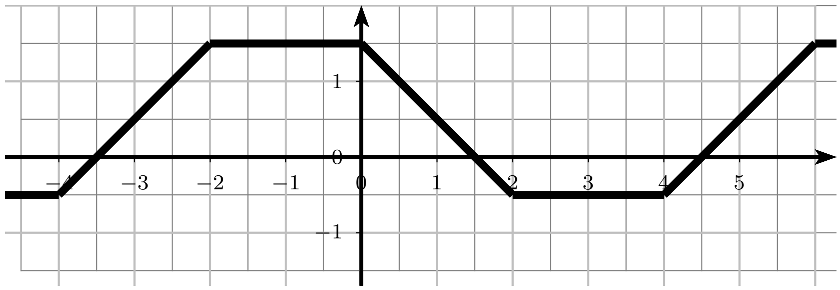
a) $f_1(t) = \dfrac{1}{2}f(t) - 1$

b) $f_2(t) = f\left(\dfrac{1}{2}t\right)$





3. Sur le graphe ci-dessous on a représenté une fonction g de période 8. On pose $f_3(t) = f(t + a) + b$. Déterminer a et b pour que f_3 soit impaire puis la représenter sur le graphe.



Mathématiques - Devoir Surveillé 4
Vendredi 20 décembre 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer le module de :

   (a) $Z_1 = \dfrac{1-7i}{3+i}$ (b) $Z_2 = (2-i)^6$ (c) $Z_3 = 17e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Écrire sous forme exponentielle :

   (a) $Z_4 = \dfrac{R+Ri}{iC\omega}$ où R, C et ω sont des réels positifs

   (b) $Z_5 = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{5e^{i\frac{\pi}{4}}}$

   (c) $Z_6 = (-2-2i)(i-\sqrt{3})$

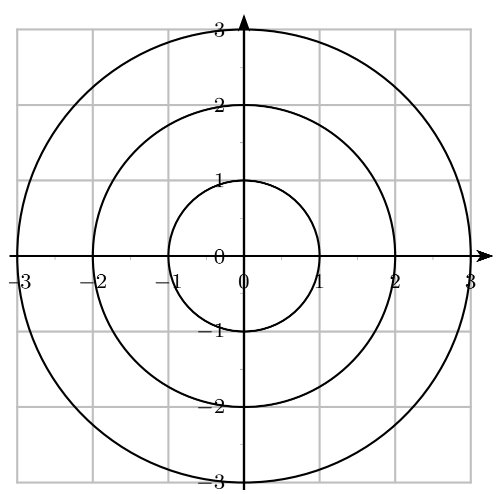
3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

   (a) $Z_7 = \dfrac{7-4i}{5+11i}$ (b) $Z_8 = (1-3i)^2 - 4i^2$ (c) $Z_9 = \left(e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-2i\pi}\right)$

Exercice 2

1. Placer précisément les points d'affixe Z_{10}, Z_{11} et Z_{12}

   (a) $Z_{10} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$ (b) $Z_{11} = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$ (c) $Z_{12} = \dfrac{1}{i}$



2. Dans chacun des cas, déterminer un nombre complexe qui satisfait les propriétés :
   (a) $Re(Z_{13}) = 6$ et $Arg(Z_{13}) = \frac{\pi}{4}$
   (b) $Im(Z_{14}) = -5$ et $|Z_{14}| = 13$
3. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler :

$$f(t) = \sin(3t)\sin(5t)$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. $Z^2 + 2Z + 37 = 0$
2. $Z^2 + 5Z - 6 = 0$
3. $2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{t\to 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18}$
2. $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18}$
3. $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{t^2 - 2t - 3}{e^{t-5}}$
4. $\lim\limits_{t\to -\infty} \frac{1}{3t^2} + \frac{2}{t} - 4$
5. $\lim\limits_{t\to +\infty} \ln\left(\frac{2}{t+3}\right)$
6. $\lim\limits_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t^2}}$
7. $\lim\limits_{t\to -\infty} \frac{\ln(2-10t)}{t+1}$

Chapitre 9

DS de l'année 2023-2024

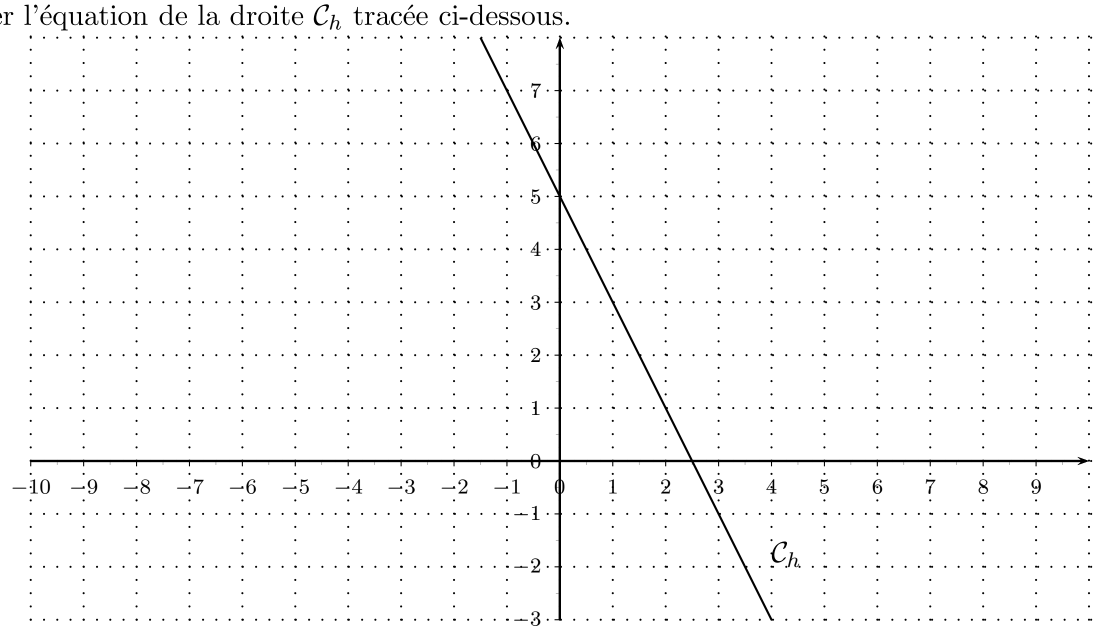
Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 29 septembre 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - 2$.
2. Donner l'équation de la droite $\mathcal{C}_h$ tracée ci-dessous.



Exercice 2 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 3t^6 + \cos(t) + 2$
2. $f_2(t) = \ln(2t - 1) + \dfrac{1}{t}$
3. $f_3(t) = \sqrt{12t + 6}$
4. $f_4(t) = 4\sin(3t)$
5. $f_5(t) = te^{2t+1}$
6. $f_6(t) = \dfrac{t^2 + 3t + 1}{t - 1}$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Simplifier les écritures :

(a) $A=\sqrt{405}-4\sqrt{5}$ (b) $B=\dfrac{256+8^2}{3\times 8}$ (c) $C=\dfrac{(0,0001)^3\times 10^3}{10000\times 100}$

2. Résoudre l'équation $\dfrac{3}{5(x+4)}=\dfrac{4}{x+1}$.

3. On considère l'expression $\dfrac{a}{b(c-d)}=\dfrac{d}{c-d}$. Déterminer c en fonction de a, b et d.

Exercice 4

1. Développer et **calculer** chacune des sommes suivantes :

(a) $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2k-1$ (b) $S_2=\displaystyle\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{10}$

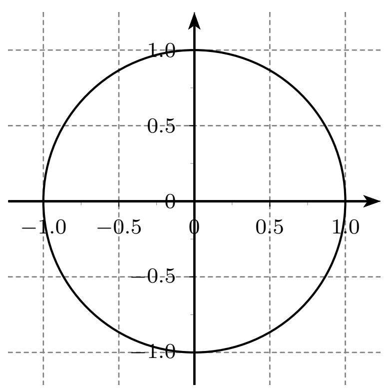
2. Ecrire les sommes suivantes en utilisant un signe Σ :

(a) $S_3=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{100}$ (b) $S_4=1-2+4-8+16-32+\cdots+256$

Exercice 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Placer, le plus précisement possible, les angles suivants sur le cercle trigonométrique ci-dessous.

(a) $\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{3\pi}{4}$ (c) $-\dfrac{2\pi}{3}$ (d) $\dfrac{12\pi}{8}$



2. Donner la mesure principale des angles suivants :

(a) $\theta_1=\dfrac{53\pi}{2}$ (b) $\theta_2=\dfrac{55\pi}{6}$ (c) $\theta_3=-\dfrac{2023\pi}{4}$

Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Traduire et **expliquer** la phrase mathématique suivante :

$$\exists x\in\mathbb{R} \text{ tel que } f(x)=0$$

(b) Donner la négation de cette phrase en math et en français.

2. Déterminer en justifiant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 81 \Leftrightarrow x = 9$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq -3$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow x > -1$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{2+x}{2} = x$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, \dfrac{\frac{2}{3}}{x} = \dfrac{2}{\frac{3}{x}}$

(g) $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, A = (a+b)^2 + (a-b)^2 + a^2 + b^2$ est un multipe de 3.

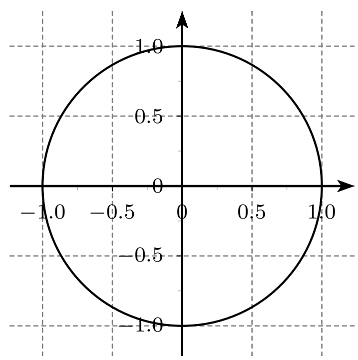
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 17 novembre 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. (a) Donner la mesure principale de l'angle $\theta = \dfrac{-2023\pi}{4}$
   (b) Placer l'angle θ sur le cercle trigonométrique ci-dessous



2. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos(x) \leq -\dfrac{1}{2}$
3. (a) Simplifier $A = \sin\left(\dfrac{9\pi}{2} - x\right)$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{9\pi}{2} - x\right)$
   (c) Donner les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$
4. Déterminer :

   (a) $\arctan(-\sqrt{3})$ (b) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (c) $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (d) $\tan\left(\arctan\left(3\right)\right)$

Exercice 2

1. (a) Mettre la fonction $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$
   (b) En déduire la période de f
   (c) Déterminer la parité de f
2. (a) Prouver que : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
   (b) A l'aide de cette formule, déterminer la période de la fonction $g(t) = \cos(27\pi t)\cos(3\pi t)$

(c) Déterminer la parité de g

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes :

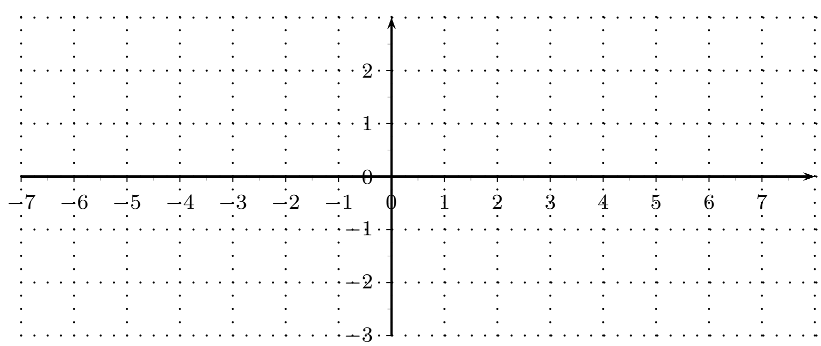
1. La fonction $f_1(t) = 2\cos(3t) - \sin(3t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?
$$-2y'(t) - 3y(t) = 15\sin(3t)$$
2. Donner une équation différentielle linéaire du premier ordre admettant $f_2(t) = t^2 + 1$ comme solution
3. Donner une équation différentielle linéaire **homogène** du premier ordre admettant $f_3(t) = e^{-\frac{3t}{2}}$ comme solution
4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $\begin{cases} 3y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'(t) - 5y(t) = 10t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (c) $(3t+1)y'(t) - y(t) = 0$

Exercice 4

1. Tracer sur l'intervalle $[-6, 6]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant toutes les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{2}{3}t - 2 \text{ sur } [0,3] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est 6-périodique} \end{cases}$$



2. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f_1(t) = 4$ (b) $f_2(t) = 3t^2 - t$ (c) $f_3(t) = \tan(t)$

3. La dérivée d'une fonction paire est paire. **Vrai ou Faux ? Justifiez votre réponse !**

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 15 décembre 2023 - Durée : 1h30

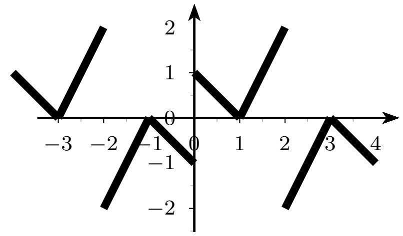
Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée au soin et à la rédaction

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

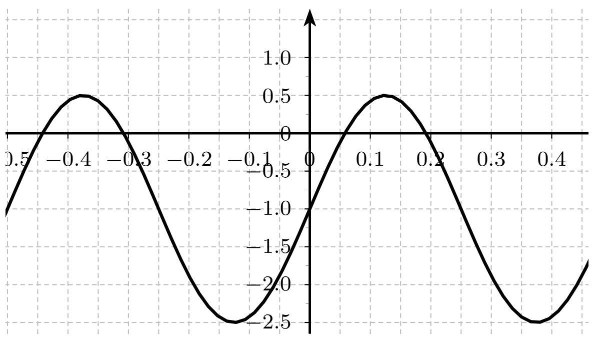
1. Déterminer la période des fonctions suivantes :
(a) $f_2(t) = -2\pi\sin\left(\frac{t}{4}\right) + 1$ (b) $g_2(t) = \cos(36\pi t) + \sin(126\pi t)$
2. Déterminer la parité des deux fonctions suivantes :

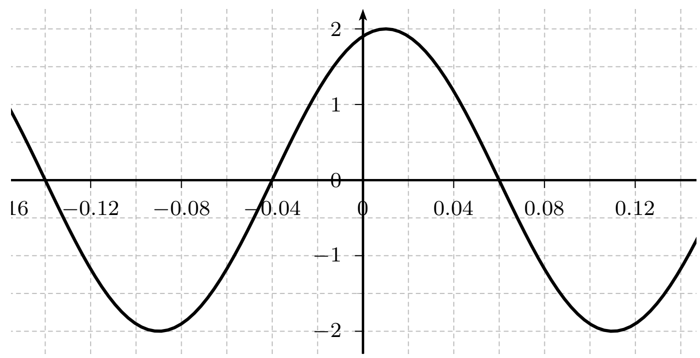
(a) $f(t) = \ln\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$

(b) 

Exercice 2

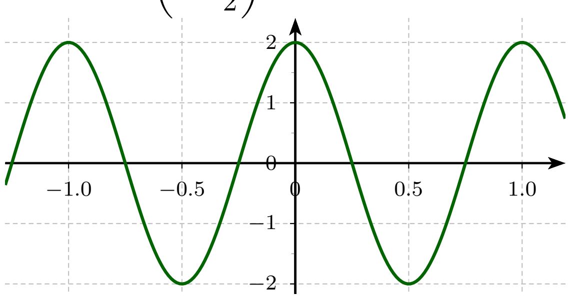
1. Les deux fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$. Déterminer dans chaque cas les valeurs de A, ω, φ et C

(a) 

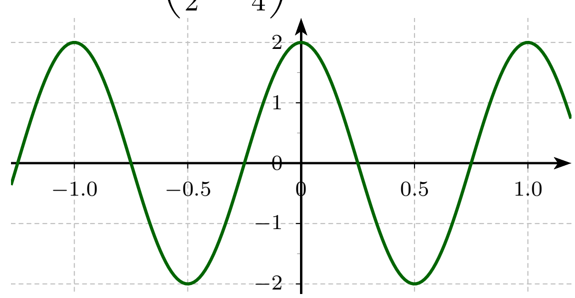
(b) 

2. On a représenté la fonction $f(t) = 2\cos(2\pi t)$ sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors sur chaque graphiqe f_1 et f_2 :

a) $f_1(t) = f\left(t + \dfrac{1}{2}\right)$

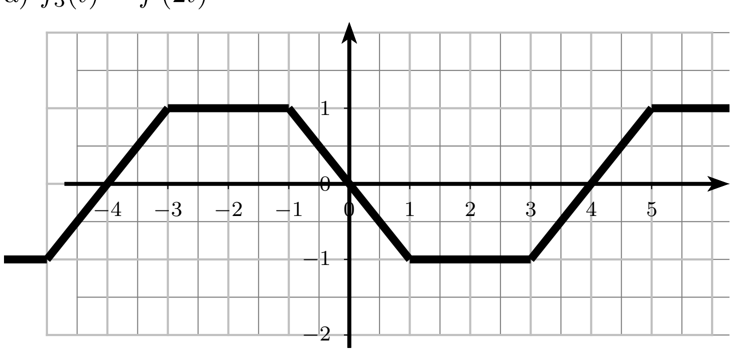


b) $f_2(t) = f\left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\right)$

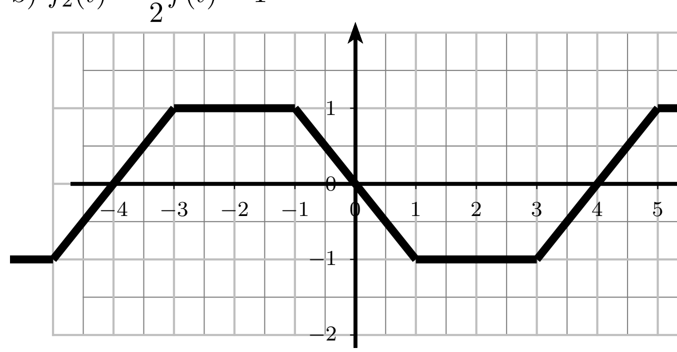


3. Sur les deux graphes ci-dessous on a représenté une fonction « trapèze »de période 8. Représenter alors f_3 et f_4 :

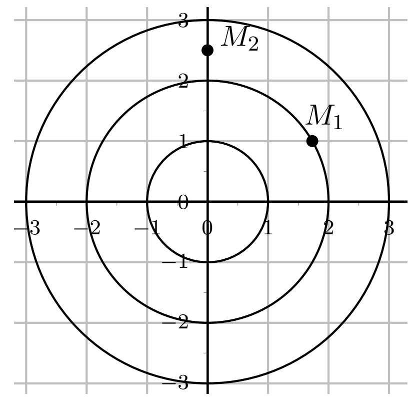
a) $f_3(t) = f\,(2t)$



b) $f_2(t) = \dfrac{1}{2}f(t) - 1$



Exercice 3



1. Donner les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2 représentés sur le graphique suivant.

   (a) $z_1 =$ (b) $z_2 =$

2. Placer précisemment sur le même graphique les points d'affixe :

   (a) $z_3 = -2 - 3i$
   (b) $z_4 = 2e^{i\frac{10\pi}{3}}$
   (c) $z_5 = -3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Linéariser les deux expressions : $f(t) = \cos(4t)\sin(7t)$ et $g(t) = \sin^2(3t)$.
2. On considère l'équation :
$$z^2 - (2-3i)z - 5i - 4 = 0$$
   Le nombre complexe $z = 3 - i$ est-il solution ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   (a) $z^2 - 7z + 13 = 0$ (b) $-4z^2 + 8z - 5 = 0$ (c) $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$

Exercice 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

   (a) $z_1 = 3i(1+2i)(2-5i)$
   (b) $z_2 = \dfrac{1-2i}{(3+4i)^2}$
   (c) $z_3 = \dfrac{3}{i^5} - \dfrac{1}{i^4} + \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{5}{i} + 1$
   (d) $z_4 = e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi}{6}} + \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{3}} + 4e^{i\pi}$

2. Déterminer le module de $z_5 = 3e^{i\pi} + 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3. Déterminer l'argument de $z_6 = (1+i\sqrt{3})(2-2i)$
4. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

   (a) $z_7 = 3i(1-i)(\sqrt{3}+i)$
   (b) $z_8 = \dfrac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{\pi}{4}}}$

5. Déterminer le module et l'argument de $Z = \dfrac{1}{1+jR_1C\omega} \times \dfrac{jL\omega}{1+jR_2C\omega}$ en fonction des constantes réelles positives R_1, R_2, C, L et ω.

Chapitre 10

DS de l'année 2022-2023

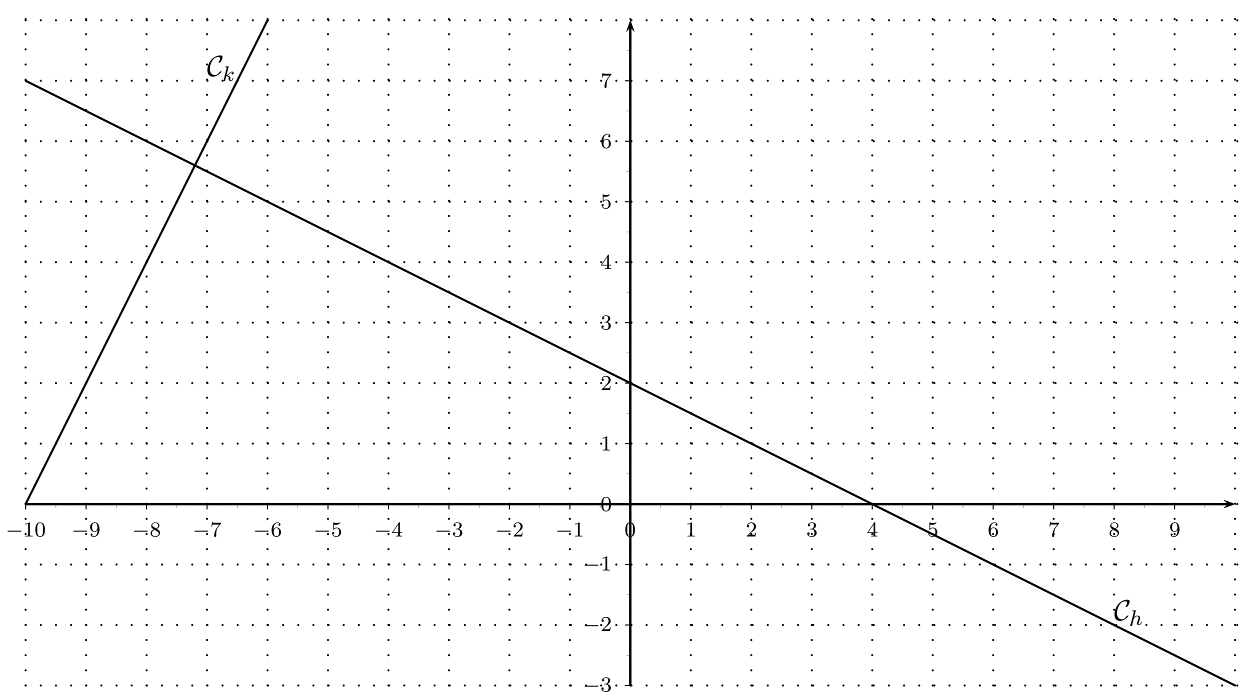
Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 30 septembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 1 : rappels de calcul***

1. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les droites représentatives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = -\frac{x}{5} + 1$ **en expliquant votre démarche**
   (b) $g(x) = 3x - 2$ **sans justifier**
2. Donner les équations de chacune des droites suivantes ($\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$) **en expliquant votre démarche**.



Exercice 2 ***Chapitre 1 : rappels de calcul*** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 2t^5 + 3t^4 - 4t^3 - 5t^2 + 6t + 7$
2. $f_2(t) = \cos(t)\sin(t)$
3. $f_4(t) = \frac{1}{(3t+2)^4}$
4. $f_5(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$
5. $f_7(t) = \ln(2t+5)$
6. $f_8(t) = e^{\frac{t}{2}}$

Exercice 3 ***Chapitre 1 : rappels de calcul*** Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Ecrire $A = \frac{2022}{9}$ sous la forme $E + \frac{P}{Q}$ oú E est un nombre entier et $\frac{P}{Q}$ est une fraction irréductible avec $P < Q$.
2. Simplifier les écritures :

   (a) $B = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

   (b) $C = \frac{16^4+8^3}{4^5}$
3. On considère l'expression $\frac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \gamma$. Déterminer b en fonction de a, α, β et γ.

Exercice 4 ***Chapitre 2 : Logique et Notation Mathématiques*** Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Compléter **(sans justifier)** les pointillés par le connecteur logique qui convient : $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^3 = 8 \ \cdots\cdots \ x = 2$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 = 16 \ \cdots\cdots \ x = 2$

   (c) Soit N un entier. "N n'est pas un multiple de 3" $\cdots\cdots$ "N^2 n'est pas un multiple de 3"
2. Répondre par **Vrai ou Faux en justifiant** (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = -1$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\},\ \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2x+1$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 2x + 1 = 0$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 18 novembre 2022 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

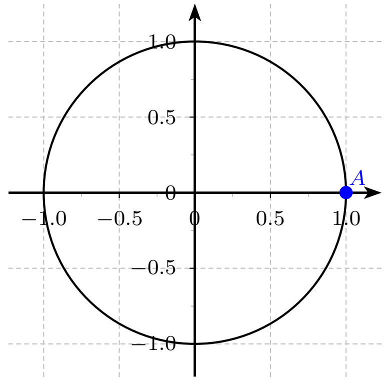
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. Donner la mesure principale de chacun des angles

$$\theta_1 = \frac{31\pi}{4} \qquad \theta_2 = \frac{1789\pi}{6} \qquad \theta_3 = \frac{-19\pi}{3}$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les 3 angles de la question précédente :



3. Donner les valeurs (sans justifier) de :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \qquad \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$$

4. Déterminer les valeurs (sans justifier) de

$$\arctan(\sqrt{3}) = \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) =$$

Exercice 2 ***Chapitre 3 : Trigonométrie***

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin(3t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$
   (b) Donner les solutions de l'équation précédente dans $[0, 2\pi[$.
2. Mettre la fonction $f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$
3. Donner les valeurs de $t \in]-\pi;\pi]$ qui soient solutions de $\cos(t) > -\dfrac{1}{2}$.
4. Démontrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\cos(a) \neq 0$ et $\cos(b) \neq 0$ on a

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

Exercice 3 ***Chapitre 4 : Équations différentielles d'ordre 1*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La fonction $f(t) = t\cos(t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$-y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t\sin(t)$$

2. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, **homogène** telle que la fonction $f(t) = e^{-\frac{t}{3}}$ soit solution.
3. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, telle que la fonction $f(t) = t^3 - 3t + 4$ soit solution.

Exercice 4 ***Chapitre 4 : Équations différentielles d'ordre 1***

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

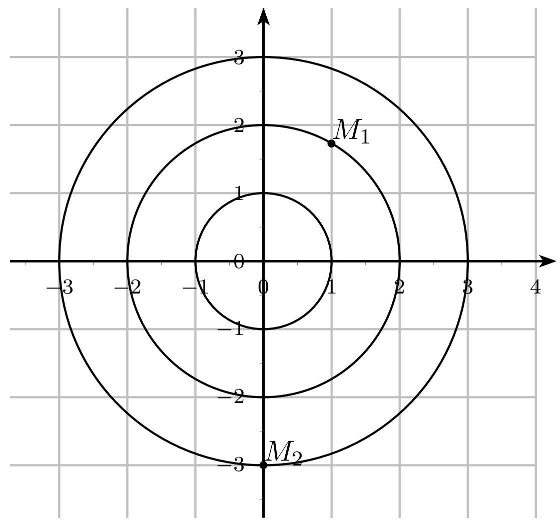
$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 16 décembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 6 : Nombres complexes***



1. Donner les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2 représentés sur le graphique suivant.

   (a) $z_1 =$ (b) $z_2 =$

2. Placer précisement sur le même graphique les points d'affixe :

   (a) $z_3 = 2 + 3i$ (b) $z_4 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 2 ***Chapitre 6 : Nombres complexes*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Linéariser l'expression $A = \cos(4x)\sin(x)$.
2. On considère l'équation :
$$z^2 - (2\sqrt{2} + i\sqrt{3})z + 2 + i\sqrt{6} = 0$$
   Le nombre complexe $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ est-il solution ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   (a) $2z^2 - 4z - 30 = 0$ (b) $z^2 - 2z + 5 = 0$ (c) $z^2 + (2 - 4i)z - (3 + 6i) = 0$

Exercice 3 ***Chapitre 6 : Nombres complexes*** Déterminer les parties réelles et imaginaires ainsi que le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
2. $z_2 = \overline{(1-i)}(-2+2i)^2$
3. $z_3 = 2i^7 - i^6 + 3i^5 - i^4 + i^2 - 5i + 1$
4. $z_4 = \frac{2+i}{1+3i}$
5. $z_5 = -e^{-\frac{i\pi}{6}}$
6. $z_6 = 4 - 4i$

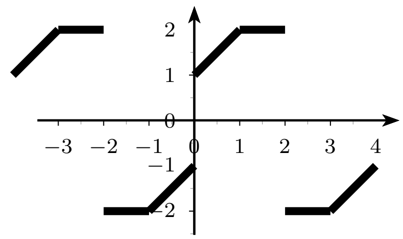
Exercice 4 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Tracer sur $[-4,4]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie toutes les propriétés suivantes :
   - f est paire
   - f est de période 2
   - sur $[0,1]$ on a : $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -4t+4 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$
2. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = t^2 + \cos(3t)$

   (b) $g(t) = \frac{t+t^3}{t^2+1}$

   (c)

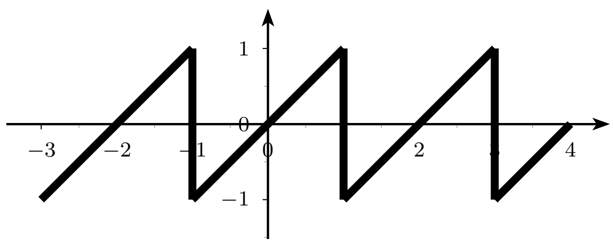


3. Déterminer la périodicité des fonctions suivantes :

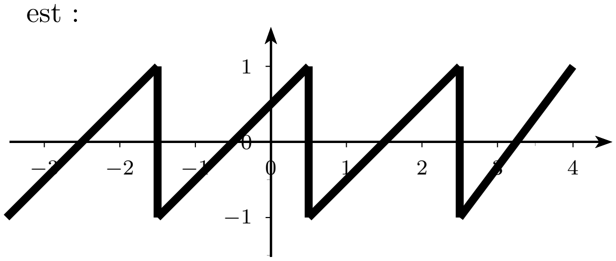
   (a) $f_2(t) = 2\cos(3t-5)$

   (b) $g_2(t) = \sin(30\pi t) + \sin(24\pi t)$

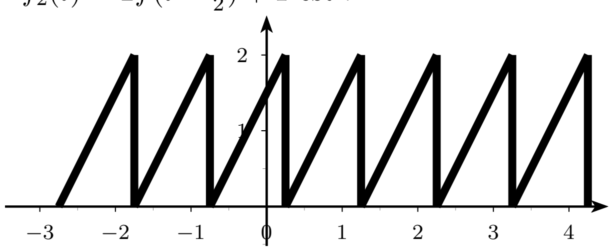
Exercice 5 ***Chapitre 5 : Fonctions périodiques*** **Vrai ou Faux ? Justifiez votre réponse !**
On considère la fonction f suivante :



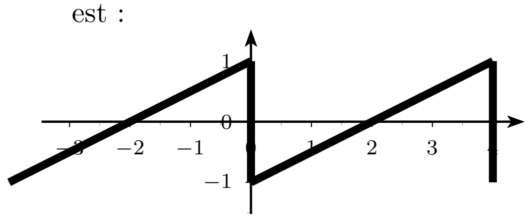
1. La courbe représentative de $f_1(t) = f(t - \frac{1}{2})$ est :



2. La courbe représentative de $f_2(t) = 2f(t - \frac{1}{2}) + 1$ est :



3. La courbe représentative de $f_3(t) = f(\frac{t}{2} + 1)$ est :



4. La courbe représentative de $f_4(t) = |f(t-1)|$ est :