**Fonctions périodiques
et
opérations sur les fonctions**

1 Notions de parité et de période

1.1 Parité

DÉFINITION. Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f.
On dit que f est paire si et seulement si $\forall t \in D_f$ on a :

$$-t \in D_f \quad \text{et} \quad f(-t) = \ldots .$$

On dit que f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a :

$$-t \in D_f \quad \text{et} \quad f(-t) = \ldots .$$

EXEMPLES.

1. • $f(t) = t^2$ est ...
2. • $f(t) = t^3$ est ...
3. • $f(t) = \cos(t)$ est ...
4. • $f(t) = \sin(t)$ est ...
5. • $f(t) = t\sin(t)$ est ...

REMARQUES.
• Une fonction peut n'être ni paire ni impaire. Par exemple, les fonctions suivantes ne sont ni paire ni impaire.

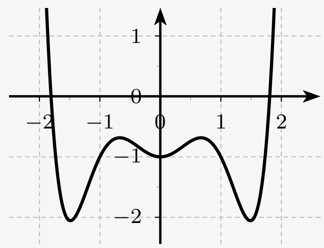
$$f(t) = \ldots\ldots \qquad f(t) = \ldots\ldots \qquad f(t) = \ldots\ldots$$

• Le produit de 2 fonctions qui ont la même parité est une fonction ....
Le produit de 2 fonctions qui sont de parité différente est une fonction ....

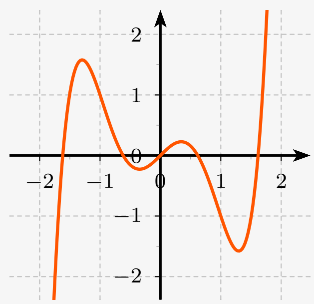
• Une fonction de la forme $f(t) = t^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ est paire si et seulement si ...., et elle est impaire si et seulement si ....

• Il n'existe qu'une fonction qui soit paire et impaire : $f(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème. *Soit f une fonction.*
Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe C_f est symétrique par rapport à ....



Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe C_f est symétrique par rapport à ....



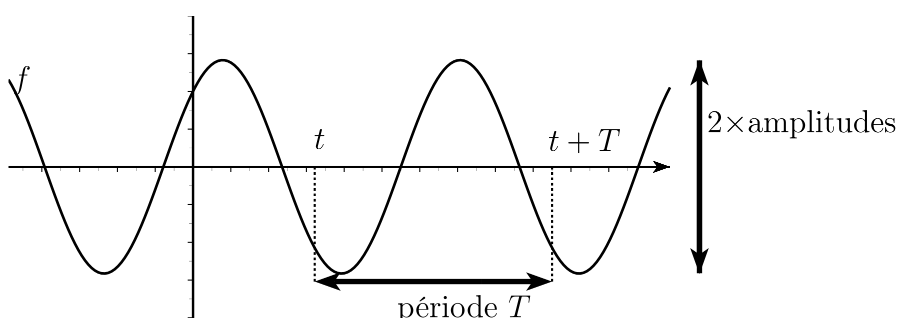
1.2 Fonctions périodiques

Définition. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $T \in]0; +\infty[$. On dit que T est une période pour f si :

$$\forall t \in D_f : \quad t + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(t+T) = f(t)$$

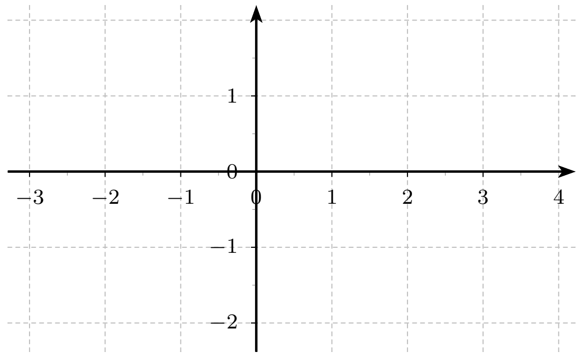
Remarque. Si f admet T pour période alors f admet également nT avec $n \in \mathbb{Z}^\star$ comme période. C'est pourquoi, dans la suite de ce cours, nous déterminerons toujours la plus petite période lorsque pour l'on cherche la période d'une fonction.

Définition. Soit f une fonction définie sur D_f et soit $T \in]0; +\infty[$.
On dit que f est T**-périodique** (ou périodique de période T) si T est la plus petite des périodes pour f.
On définit alors **l'amplitude** A de f par $A = ...$



Remarque. Pour définir une fonction T-périodique, il suffit de la connaître sur un intervalle de longueur T.

Exemple. Représenter sur le graphique ci-dessous la fonction 2-périodique paire définit par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$. Puis donner son amplitude et sa pulsation.

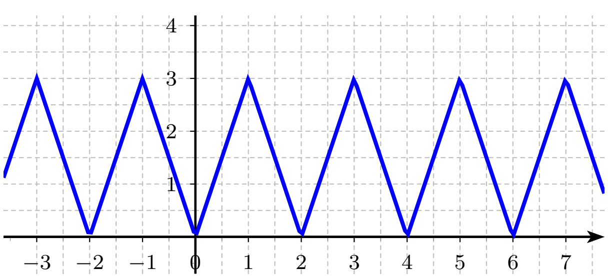


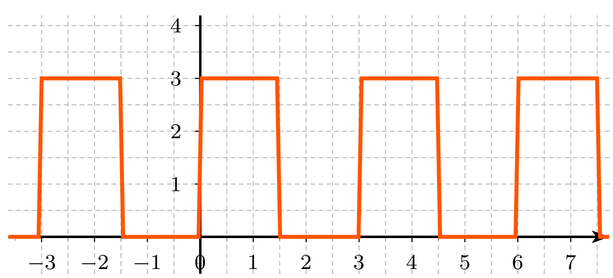
Théorème. *Soient f une fonction T_1-périodique et g une fonction T_2-périodique.*

- *Pour tout réel non nul λ : λf est de période $T = T_1$*
- *Pour tout réel $\omega > 0$: $f(\omega t)$ est est de période $T = \dfrac{T_1}{\omega}$.*
- *Pour tout réel C : $f(t) + C$ est de période $T = T_1$*
- *Si $T_1 = T_2$ alors $f + g$ est de période $T = T_1$.*
- *Si $T_1 \neq T_2$ alors $f + g$ est T-périodique avec $T = ppcm(T_1, T_2)$.*

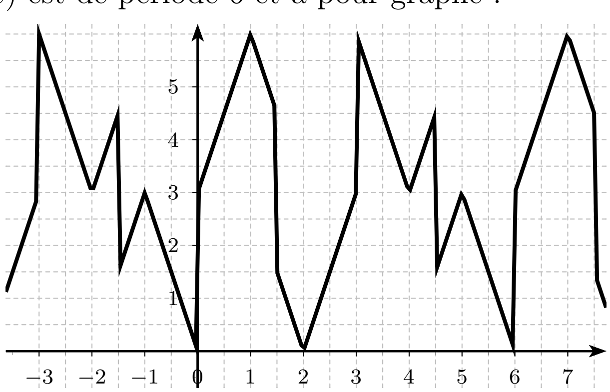
(ppcm : “plus petit commun multiple”)

Exemple. Considérons les fonctions f et g suivantes, respectivement de période 2 et 3 :





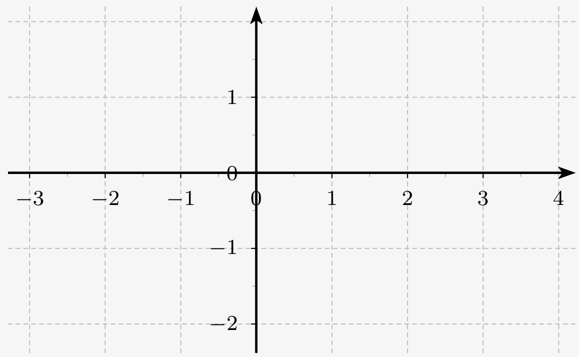
La fonction $h(t) = f(t) + g(t)$ est de période 6 et a pour graphe :



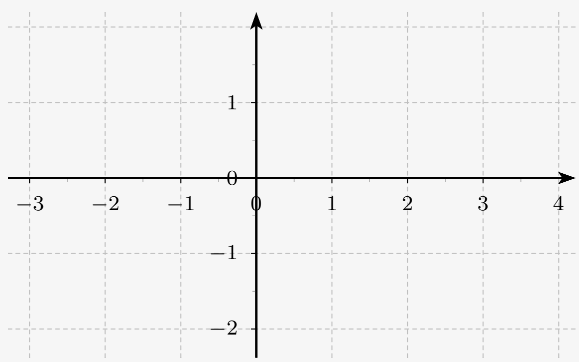
1.3 Fonctions cosinus et sinus

Théorème.

• *Soit la fonction* $f(t) = \cos(t)$.
f *est définie sur* $\mathbb{R}$, *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(t) = \ldots\ldots.$
f *est une fonction* .... *et* ....*-périodique, d'amplitude* ....
La courbe représentative de f *est*



• *Soit la fonction* $f(t) = \sin(t)$.
f *est définie sur* $\mathbb{R}$, *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(t) = \ldots\ldots.$
f *est une fonction* .... *et* ....*-périodique, d'amplitude* ....
La courbe représentative de f *est*



Théorème. *Soit* $\omega > 0$ *et soit* f *une fonction trigonométrique telle que* $f(t) = \cos(\omega t)$ *ou* $f(t) = \sin(\omega t)$.
Alors f *est* T*-périodique avec*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{(avec } f \text{ la fréquence)}$$

La constante ω *est appelée pulsation de la fonction.*

Exemple. Considérons les fonctions $f(x) = \cos(6t)$ et $g(x) = \sin(4t)$.

Déterminer les périodes de : f, g et $h(x) = \cos(6t) + \sin(4t)$.

Remarque. Soient $\omega > 0$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction f définie par

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t).$$

On rappelle que l'on peut écrire f sous la forme :

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

La fonction f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, d'amplitude $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et l'angle ϕ est appelé le déphasage par rapport à la fonction sinus.

2 Opérations sur les fonctions

On munit le plan d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

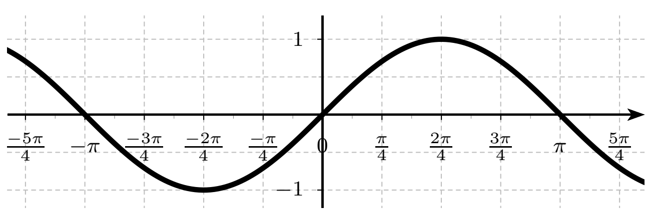
2.1 Retard et avance

Théorème. *Soit f une fonction et soit $\tau \in [0; +\infty[$. On pose*

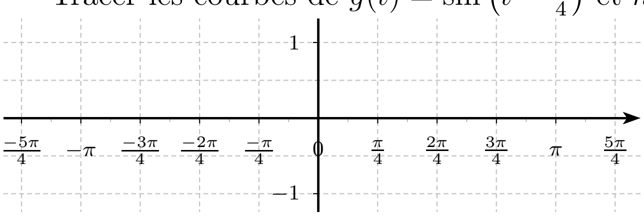
$$g(t) = f(t-\tau) \quad \text{et} \quad h(t) = f(t+\tau)$$

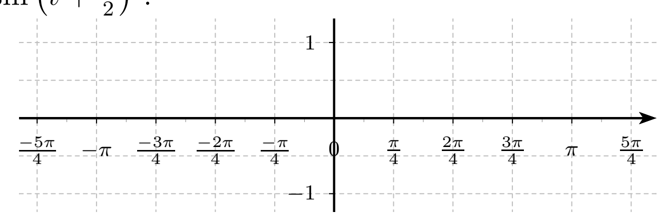
La courbe de g est obtenue à partir de celle de f par translation de vecteur $\tau\vec{i}$ (vers la droite).
La courbe de h est obtenue à partir de celle de f par translation de vecteur $-\tau\vec{i}$ (vers la gauche).

Exemple. Soit la fonction $f(t) = \sin(t)$ dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes de $g(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ et $h(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$:





Vocabulaire : On dit que g est **en retard** par rapport à f et h **en avance** par rapport à f.

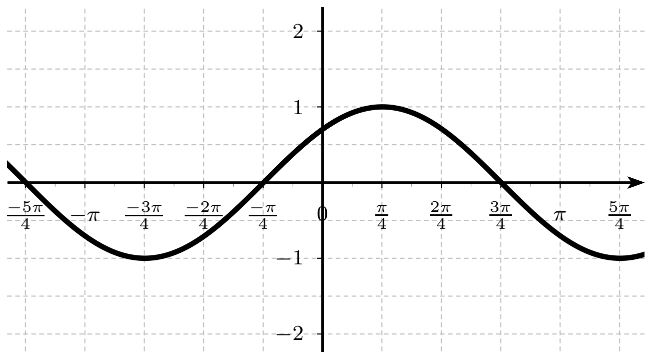
2.2 Changement d'amplitude

Théorème. *Soit f une fonction et soit $A \in [0; +\infty[$. On pose*

$$g(t) = Af(t)$$

Si $A > 1$, la courbe représentative de g est obtenue en « augmentant » l'amplitude de la courbe de f d'un facteur A.
Si $A < 1$, la courbe représentative de g est obtenue en « diminuant » l'amplitude de la courbe de f d'un facteur A.

Exemple. Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



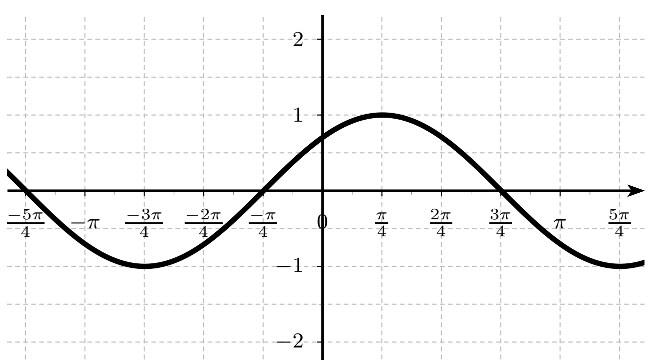
Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de $g(t) = 2f(t)$ et $h(t) = \dfrac{1}{2}f(t)$.

Théorème. *Soit f une fonction. On pose*

$$g(t) = -f(t)$$

La courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple. Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus la courbe de $g(t) = -f(t)$.

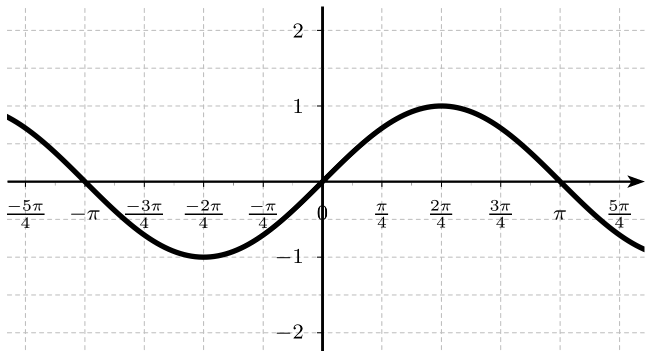
2.3 Offset

Théorème. *Soit f une fonction et soit $V \in \mathbb{R}$. On pose*

$$g(t) = f(t) + V$$

La courbe de g est obtenue à partir de celle de f par translation de vecteur $V\vec{j}$ (vers le haut si V est positif et vers le bas si V est négatif).

Exemple. Soit la fonction $f(t) = \sin(t)$ dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de $g(t) = \sin(t) - 1$ et $h(t) = \sin(t) + 1$.

Remarque : En G.E, si f est un signal sinusoïdal, on détermine V_{moy}, la valeur moyenne de f, puis on applique un offset de $-V_{moy}$ pour obtenir un signal de valeur moyenne nulle (“centré à la hauteur” 0).

2.4 Dilatation du temps

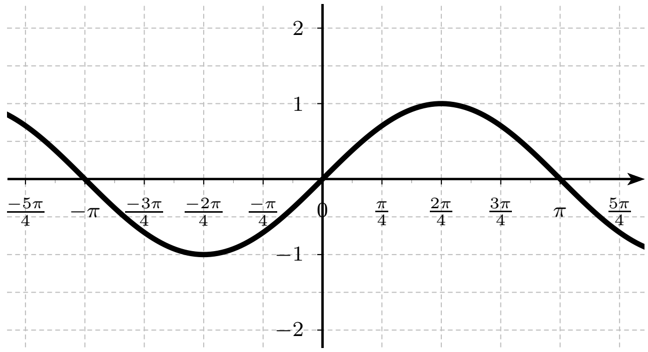
Théorème. *Soit f une fonction et soit $\omega \in]0; +\infty[$. On pose*

$$g(t) = f(\omega t)$$

• *Si $\omega > 1$, la courbe représenatitve de g est obtenue à partir de celle de f par “compression horizontale” de facteur ω (le temps défile ω fois plus vite et la période est divisé par ω),*

• *Si $\omega < 1$, la courbe représenatitve de g est obtenue à partir de celle de f par “dilatation horizontale” de facteur ω (le temps défile ω fois plus lentement et la période est multipliée par $\frac{1}{\omega}$),*

Exemple. Soit la fonction $f(t) = \sin(t)$ dont la courbe représentative est :



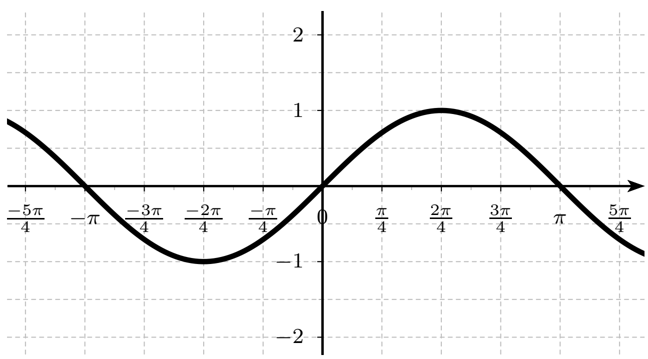
Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de $g(t) = \sin(2t)$ et $h(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$.

Théorème. *Soit f une fonction. On pose*

$$g(t) = f(-t)$$

La courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. (on inverse le temps)

Exemple. Soit la fonction $f(t) = \sin(t)$ dont la courbe représentative est :



Tracer la courbe de $g(t) = f(-t)$: