

# Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction

## Vendredi 14 février 2025 - Durée : 1h30

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1** Soit la fonction  $f(x) = -2 \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 1$

1. Déterminer  $D$  l'ensemble de définition de  $f$ .

Il faut que  $\frac{1}{3}x + 1 > 0$  donc  $D_f = ]-3; +\infty[$ .

2. Calculer la dérivée de  $f$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .

On a

$$f'(x) = -2 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x + 1} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{3}x + 1}$$

Sur l'ensemble  $D_f$  on sait que  $\frac{1}{3}x + 1 > 0$ , donc la dérivée est négative et la fonction est strictement décroissante.

3. Déterminer les limites de  $f$  en  $-3$  et  $+\infty$  et compléter le tableau de variation de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -2 \times \ln(0^+) + 1 = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \times \ln(+\infty) + 1 = -\infty$$

Donc

|        |           |           |
|--------|-----------|-----------|
| $x$    | $-3$      | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |



4. Déterminer l'ensemble  $E$  tel que  $f$  soit bijective de  $D$  dans  $E$

D'après le tableau de variation  $f$  est bijective de  $D_f = ]-3; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

5. Déterminer la réciproque de  $f$ .

On résout  $f(x) = y$  :

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\Leftrightarrow -2 \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 1 = y \\
 &\Leftrightarrow -2 \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = y - 1 \\
 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = -\frac{1}{2}(y - 1) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 1 = e^{-\frac{1}{2}(y-1)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x = e^{-\frac{1}{2}(y-1)} - 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 3e^{-\frac{1}{2}(y-1)} - 3
 \end{aligned}$$

Donc  $f^{-1}(x) = 3e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 3$

6. Déterminer l'équation de la tangente ( $d_0$ ) à la courbe représentative de  $f$  en  $x = 0$ .

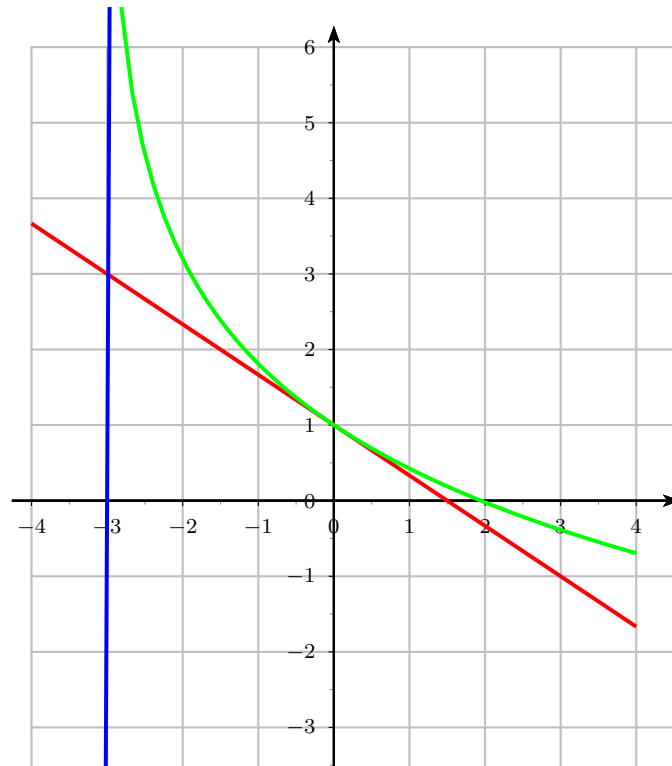
On applique la formule qui donne l'expression de la tangente en  $a$  :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ , avec  $a = 0$ .

On obtient :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1$$

7. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la tangente ( $d_0$ ), la ou les asymptote(s) et, le plus précisément possible, la courbe représentative de  $f$ .

Voir ci-dessous.



**Exercice 2**

1. Soient les fonctions  $f(x) = \frac{1}{2-5x}$ ,  $g(x) = \frac{2x-1}{5x}$  et  $h(x) = \frac{x-2}{5x}$ .

(a) Déterminer  $f \circ g$  (sous la forme la plus simplifiée possible)

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\frac{2x-1}{5x}\right) \\ &= \frac{1}{2-5\left(\frac{2x-1}{5x}\right)} \\ &= \frac{1}{2-\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \times \frac{x}{x} \\ &= \frac{x}{2x-(2x-1)} \\ &= \frac{x}{1} \\ &= x \end{aligned}$$

(b) Déterminer  $f \circ h$  (sous la forme la plus simplifiée possible)

$$\begin{aligned} f \circ h(x) &= f\left(\frac{x-2}{5x}\right) \\ &= \frac{1}{2-5\left(\frac{x-2}{5x}\right)} \\ &= \frac{1}{2-\left(\frac{x-2}{x}\right)} \times \frac{x}{x} \\ &= \frac{x}{2x-(x-2)} \\ &= \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

(c) Parmi les fonctions  $g$  et  $h$ , l'une d'elle est-elle la réciproque de  $f$  ?

Comme  $f \circ g(x) = x$ , on en déduit que  $g$  est la réciproque de  $f$ .

2. On considère la fonction  $f(x) = \cos(2+3\sqrt{x})$ . Décomposer  $f$  sous la forme  $w \circ v \circ u(x)$  avec  $w$ ,  $v$  et  $u$  trois fonctions différentes de l'identité.

Il suffit de poser :

$$w(x) = \cos(x) \quad v(x) = 2+3x \quad u(x) = \sqrt{x}$$

**Exercice 3**

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a)  $|x-7| = 1$

On a deux cas :  $x-7 = 1$  ou  $x-7 = -1$  donc 2 solutions :

$$S = \{6; 8\}$$

(b)  $|2x + 3| > 4$

Cela revient à dire que  $2x + 3 > 4$  ou que  $2x + 3 < -4$ Donc que  $x > \frac{1}{2}$  ou que  $x < -\frac{7}{2}$ . Donc

$$S = ]-\infty; -\frac{7}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

(c)  $|x + 3| = |3x - 2| + 1$

On résume tous les cas possibles dans un tableau :

| $x$        | $-\infty$      | $-3$          | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|------------|----------------|---------------|---------------|-----------|
| $ x + 3 $  | $-x-3$         | 0             | $x+3$         | $x+3$     |
| $ 3x - 2 $ | $-3x+2$        | $-3x+2$       | 0             | $3x-2$    |
| équation   | $-x-3=-3x+2+1$ | $x+3=-3x+2+1$ | $x+3=3x-2+1$  |           |

On résout donc 3 équations :

- Pour  $x \leq -3$  on a

$$-x - 3 = -3x + 2 + 1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Mais 3 n'est pas inférieur à -3, donc 3 n'est pas solution.

- Pour  $-3 \leq x \leq \frac{2}{3}$  on a

$$x + 3 = -3x + 2 + 1 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Pour  $\frac{2}{3} \leq x$  on a

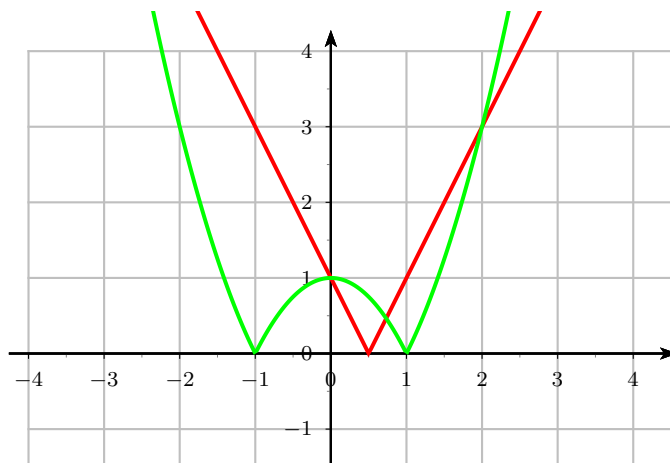
$$x + 3 = 3x - 2 + 1 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Les solutions sont donc 0 et 2.

2. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions suivantes

(a)  $f(x) = |2x - 1|$

(b)  $g(x) = |x^2 - 1|$

On trace les courbes de  $f_0(x) = 2x - 1$  et  $g_0(x) = x^2 - 1$  puis on « redresse » les parties négatives par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.On obtient (courbe de  $f$  en rouge, courbe de  $g$  en vert)

**Exercice 4** Déterminer (en justifiant la démarche) :

1.  $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$  car  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
2.  $\arcsin(0.5) = \frac{\pi}{6}$  car  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$ .
3.  $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$  car  $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .
4.  $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$  car  $\sin(X) = \sin(\pi - X)$ .  
Donc  $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$
5.  $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$  car  $\tan$  et  $\pi$ -périodique.  
Donc  $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ .
6.  $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

**Exercice 5** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, sans faire le calcul, tous les produits matriciels possibles entre deux matrices distinctes. Précisez dans chacun des cas la taille de la matrice produit associée.

Pour qu'un produit de matrices soit réalisable il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la deuxième. Ainsi, les produits possibles sont :

$$AB \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad AC \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad BC \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad DA \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

2. Déterminer si possible :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 2 \\ 1 \times (-1) + 2 \times 0 - 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$A + D$  est impossible car  $A$  et  $D$  n'ont pas les mêmes dimensions

$$3D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. La matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  est-elle l'inverse de la matrice  $B$  ?

Il faut vérifier si le produit  $MB$  (ou  $BM$ ) est égal à la matrice identité. Or

$$MB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc  $M$  n'est pas l'inverse de  $B$ .