

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 13 février 2026 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

La fonction est polynômiale donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f .

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 3 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} - 3$$

donc

$$f'(x) = x - 1$$

• si $x < 1$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante. • si $x > 1$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et compléter le tableau de variation de f .

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)^2 = +\infty$$

Donc

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

4. Déterminer les ensembles images suivants : $f(]-3; -1])$ et $f(]-1; 3])$.

Comme $f(-3) = 5$ et $f(-1) = 1$ et que f est décroissante sur $]-3; -1]$:

$$f(]-3; -1]) = [1; 5[$$

Sur l'intervalle $]-1; 3]$, la fonction atteint son minimum en 1 : $f(1) = -3$. De plus $f(-1) = -1$ et $f(3) = -1$ donc

$$f(]-1; 3]) = [-3; -1[$$

5. Déterminer E tel que f soit bijective de $D = [1; +\infty[$ dans E .

D'après le tableau de variation, f est strictement monotone sur D , donc f est bijective de D dans $E = [-3; +\infty[$.

6. Déterminer la réciproque de f , définie sur E .

On résout

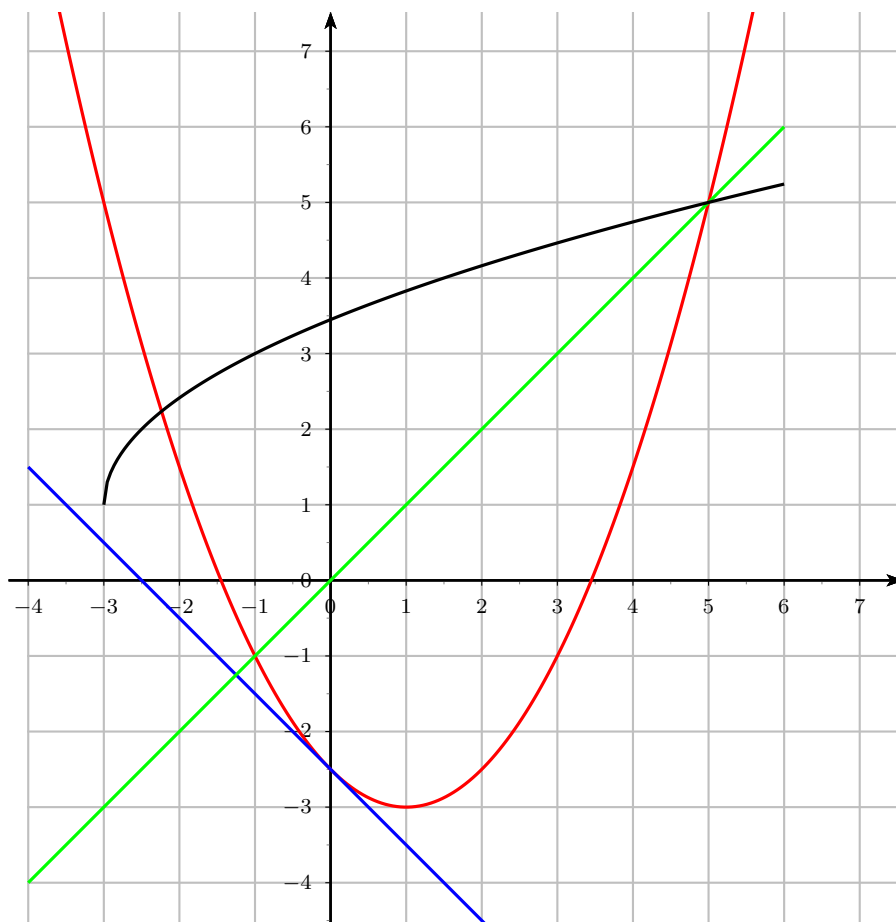
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3 = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 = y+3 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y+3) \\ &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2(y+3)} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2(y+3)} + 1 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{2(x+3)} + 1$

7. Déterminer l'équation de la tangente (d_0) à la courbe représentative de f en $x = 0$.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x - \frac{5}{2}$$

8. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la tangente (d_0) et, le plus précisément possible, les courbes représentatives de f (définie sur D) et f^{-1} (définie sur E).



Legende : f en rouge, tangente en bleu, f^{-1} en noir, $y = x$ en vert.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 2t}{3t^2 - 12}$ donne une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. On factorise donc les polynômes :

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 2t}{3t^2 - 12} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t(t - 2)}{3(t - 2)(t + 2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t}{3(t + 2)} = \frac{1}{6}$$

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 5t + 8}{t^3 - 12}$ donne une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. La limite de chaque polynôme en l'infini est donnée par leur monome de plus haut degré :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 5t + 8}{t^3 - 12} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t^5)}$ donne une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. D'après le critère de croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t^5)} = +\infty$$

4. $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t^3 + 3t - 5} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0$

5. $\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t > 2}} \ln\left(\frac{t+1}{t-2}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t > 2}} \ln\left(\frac{3}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

Exercice 3

1. Soient les fonctions $f(t) = \sqrt{e^{2t-1}}$, $g(t) = \frac{t-1}{t+3}$ et $h(t) = \ln(t) + \frac{1}{2}$.

- (a) Déterminer $f \circ h$ sous la forme la plus simplifiée possible. f est-elle la fonction réciproque de la fonction h ?

$$f \circ h(t) = f(h(t)) = \sqrt{e^{2(\ln(t) + \frac{1}{2}) - 1}} = \sqrt{e^{2\ln(t) + 1 - 1}} = \sqrt{e^{2\ln(t)}} = \sqrt{e^{\ln(t^2)}} = \sqrt{t^2} = t$$

Comme $f \circ h(t) = t$, on en déduit que f est la réciproque de h .

- (b) Déterminer $g \circ g \circ g$ (sous la forme la plus simplifiée possible)

$$\begin{aligned} g \circ g(t) &= \frac{\frac{t-1}{t+3} - 1}{\frac{t-1}{t+3} + 3} \\ &= \frac{t-1 - (t+3)}{t-1 + 3(t+3)} \\ &= \frac{-4}{4t+8} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 g \circ g \circ g(t) &= g \circ g(g(t)) \\
 &= \frac{-4}{4\frac{t-1}{t+3} + 8} \\
 &= \frac{-4(t+3)}{4(t-1) + 8(t+3)} \\
 &= \frac{-4(t+3)}{12t+20}
 \end{aligned}$$

2. Écrire la fonction $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-3}} + 4$ comme composée de fonctions usuelles* différentes de l'identité.

On peut décomposer sous la forme $k(t) = u \circ f_5 \circ f_4 \circ v(t)$ avec $u(t) = t + 4$ et $v(t) = 2t - 3$.

$$f_1(t) = \ln(t) \quad f_2(t) = e^t \quad f_3(t) = t^2 \quad f_4(t) = \sqrt{t} \quad f_5(t) = \frac{1}{t} \quad f_6(t) = at + b$$

Exercice 4

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $|3x + 1| = 6$

Il suffit de résoudre les 2 cas suivants : $3x + 1 = 6$ et $3x + 1 = -6$.

Les solutions sont $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$.

(b) $|3 - x| > 2$

L'inéquation est équivalente à $3 - x < -2$ **ou** $3 - x > 2$, donc à $5 < x$ **ou** $1 > x$.

Donc

$$S =] - \infty; 1[\cup] 5; +\infty[$$

(c) $|x + 1| - 2|2x - 3| = -10$

On résume le comportement de chaque valeur absolue dans un tableau et on en déduit qu'il faut résoudre 3 équations selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ x + 1 $		$-x - 1$	0	$x + 1$
$ 2x - 3 $	$-2x + 3$	0		$2x - 3$
$ x + 1 - 2 2x - 3 $	$3x - 7$		$5x - 5$	$-3x + 7$

* Sur $] - \infty, -1]$,

$$|x + 1| - 2|2x - 3| = -10 \Leftrightarrow 3x - 7 = -10 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1 \in \left] - \infty, -1 \right]$$

* Sur $[-1, \frac{3}{2}]$,

$$|x + 1| - 2|2x - 3| = -10 \Leftrightarrow 5x - 5 = -10 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1 \in \left[-1, \frac{3}{2} \right]$$

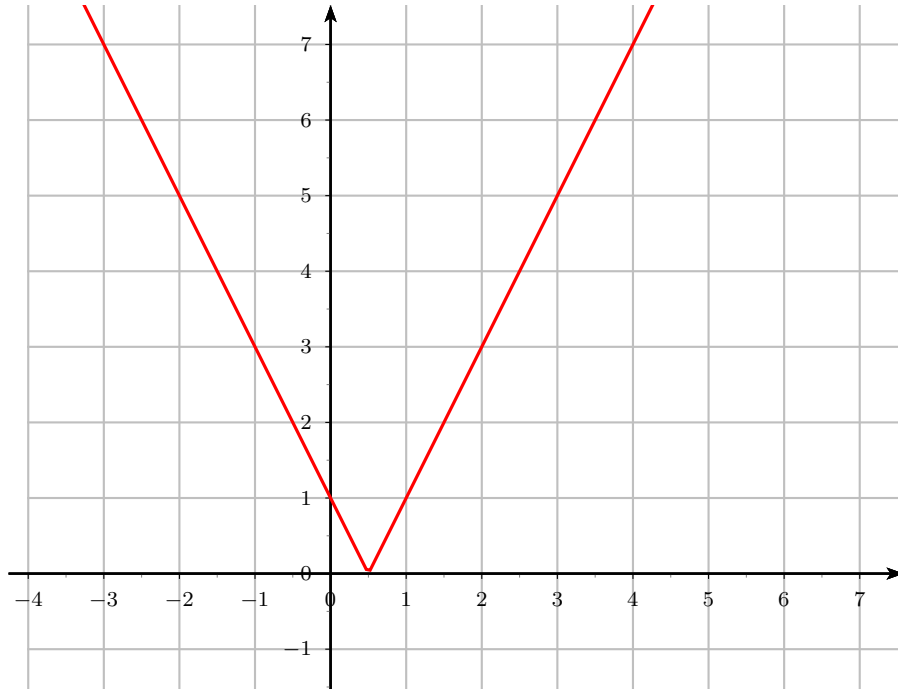
* Sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$,

$$|x+1| - 2|2x-3| = -10 \Leftrightarrow -3x+7 = -10 \Leftrightarrow -3x = -17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3} \in [\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$S = \left\{ -1; \frac{17}{3} \right\}$$

2. Tracer précisément, sur votre copie, la courbe représentative de $f(x) = |2x-1|$

On trace la droite $y = -2x + 1$ pour $x < \frac{1}{2}$ puis on trace la droite $y = 2x - 1$ pour $x \geq \frac{1}{2}$:



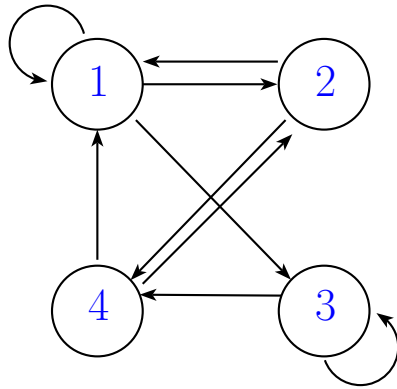
Exercice 5

1. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dessiner le graphe orienté dont A est la matrice associée.

Soit le graphe orienté suivant :



(b) Calculer A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer le nombre de chemins à 3 étapes permettant d'aller du nœud 3 au nœud 2 puis décrire chacun d'entre eux (en donnant la succession de nœuds).

Le nombre de chemins est égal au coefficient de A^3 de la ligne 3, colonne 2, qui vaut 2.

Les 2 chemins sont : 3-4-1-2 et 3-3-4-2.

2. Soient les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer si possible

(a) $B - 3C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 10 \\ -15 & -37 \end{pmatrix}$

(b) $B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$