

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Correction

Vendredi 28 mars 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $A \times B$ et $A + B$ existent ?

Pour que $A \times B$ existe il faut que B ait 3 lignes.

Pour que $A + B$ existe il faut que B ait 2 lignes et 3 colonnes.

Donc il n'existe pas de matrice B telle que les 2 calculs soient faisables.

2. Donner un exemple de matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ non-inversible dont aucun des coefficients n'est nul.

Il suffit d'avoir 2 lignes ou 2 colonnes proportionnelles. Par exemple $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 42 & 314 & 141 \end{pmatrix}$

3. Calculer les déterminants des matrices D et F suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = -9 \times (-8) - 4 \times 11 = 72 - 44 = 28$$

et

$$\begin{aligned} \det(F) &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times \begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-7) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -112 + 12 + 90 = -10 \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice E est-elle inversible ?

$$\det(E) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

Donc la matrice E est inversible.

2. Déterminer, si possible, l'inverse de E .

Calculons la comatrice de E :

$$Co(E) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} {}^tCo(E) = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} y & +z & = & 1 \\ 2x & +5z & = & 1 \\ x & +2y & +4z & = & 6 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement : $E \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ La solution est donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 9z = 1 \\ -3x + 5y - z = 12 \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 9z = 1 \\ -3x + 5y - z = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -5 & L_1 \text{ pivot} \\ -y + 13z = 11 & L_2 = L_2 - 2L_1 \\ 2y - 7z = -3 & L_3 = L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ -y + 13z = 11 & L_2 \text{ pivot} \\ 19z = 19 & L_3 = L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ -y + 13z = 11 \\ z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ -y + 13 = 11 \Rightarrow y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 - 2 = -5 \Rightarrow x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est donc $(x, y, z) = (-1, 2, 1)$

Exercice 4 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

1. Déterminer la multiplicité de la racine -1 .

- $P(-1) = 1 - 2 + 5 - 8 + 4 = 0$ donc -1 est bien racine de P
- $P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 10X + 8$ donc $P'(-1) = -4 + 6 - 10 + 8 = 0$ donc -1 est de multiplicité au moins 2.
- $P''(X) = 12X^2 + 12X + 10$ donc $P''(-1) = 12 - 12 + 10 \neq 0$ donc -1 est de multiplicité 2.

2. Montrer que $2i$ est racine de P .

$$P(2i) = (2i)^4 + 2(2i)^3 + 5(2i)^2 + 8(2i) + 4 = 16 - 16i - 20 + 16i + 4 = 0 \text{ donc } 2i \text{ est bien racine de } P.$$

3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme P est à coefficients réels, on en déduit que $-2i$ est aussi racine de P .

Donc la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}$ est

$$P(X) = (X + 1)^2(X - 2i)(X + 2i)$$

On développe $(X - 2i)(X + 2i)$ pour trouver la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}$:

$$P(X) = (X + 1)^2(X^2 + 4)$$

Exercice 5 Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Poser la division euclidienne de $P_1(X) = X^5 - 3X^3 + 2X^2 + 4X + 7$ par $D(X) = X^3 + 3X^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^5 & +0X^4 & -3X^3 & +2X^2 & +4X & +7 & X^3 + 3X^2 + 1 \\
 -(X^5 & +3X^4 & +X^2) & & & & X^2 - 3X + 6 \\
 \hline
 & -3X^4 & -3X^3 & +X^2 & +4X & +7 & \\
 & -(-3X^4 & -9X^3 & -3X) & & & \\
 \hline
 & & 6X^3 & +X^2 & +7X & +7 & \\
 & & -(6X^3 & +18X^2 & +6) & & \\
 \hline
 & & & -17X^2 & +7X & +1 &
 \end{array}$$

Conclusion :

$$X^5 - 3X^3 + 2X^2 + 4X + 7 = (X^3 + 3X^2 + 1)(X^2 - 3X + 6) - 17X^2 + 7X + 1$$

2. Le polynôme $P_2(X) = X^3 - (12 + 2i)X + 8i - 16$ admet-il une racine réelle ?

Soit $r \in \mathbb{R}$ racine de P_2 . Alors

$$P_2(r) = r^3 - (12 + 2i)r + 8i - 16 = r^3 - 12r - 16 + i(-2r + 8)$$

Or, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. Donc r est racine si et seulement si

$$r^3 - 12r - 16 = 0 \quad \text{et} \quad -2r + 8 = 0$$

Or $-2r + 8 = 0 \Leftrightarrow r = 4$. Donc 4 est la seule valeur qui annule la partie imaginaire de $P_2(r)$.

On remplace r par 4 dans la partie réelle : $Re(P_2(4)) = 4^3 - 12 \times 4 - 16 = 64 - 48 - 16 = 0$.

Donc $r = 4$ annule la partie réelle et la partie imaginaire simultanément.

Donc 4 est la seule racine réelle de P_2

3. Soient les polynômes $P_3(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$.

- (a) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_1 tel que $\deg(P_3 \times Q_1) = 15$

On pose $Q_1(X) = X^{10}$, on a alors $\deg(P_3 \times Q_1) = \deg(P_3) + \deg(Q_1) = 5 + 10 = 15$

- (b) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_2 tel que $\deg(P_3 \circ Q_2) = 10$

On pose $Q_2(X) = X^2$, on a alors $\deg(P_3 \circ Q_2) = \deg(P_3) \times \deg(Q_2) = 5 \times 2 = 10$

- (c) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_3 tel que $\deg(P_3 + Q_3) = 4$

On pose $Q_3(X) = -X^5$,

on a alors $P_3(X) + Q_3(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5 - X^5 = 2X^4 + 3X^2 + X - 5$.

Et donc $\deg(P_3 + Q_3) = 4$.

4. Soient le polynôme $P_4(X) = X^3 + 6X^2 + 10X + 8$.

- (a) Poser la division euclidienne de P_4 par $(X + 4)$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 6X^2 + 10X + 8 & X + 4 \\ \hline -(X^3 + 4X^2) & X^2 + 2X + 2 \\ \hline 2X^2 + 10X + 8 & \\ \hline -(2X^2 + 8X) & \\ \hline 2X + 8 & \\ \hline -(2X + 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On peut donc écrire

$$P_4(X) = (X + 4)(X^2 + 2X + 2)$$

- (b) Donner la forme factorisée de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Factorisons le polynôme de degré 2 : $X^2 + 2X + 2$

On a $\Delta = 4 - 8 = -4$ donc le polynôme admet 2 racines complexes :

$$X_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \quad \text{et} \quad X_2 = -1 + i$$

Donc la forme factorisée de P_4 dans $\mathbb{C}$ est

$$P_4(X) = (X + 4)(X - (-1 - i))(X - (-1 + i))$$