

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 28 mars 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendants :

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $A \times B$ et $A + B$ existent ?
2. Donner un exemple de matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ non-inversible dont aucun des coefficients n'est nul.
3. Calculer les déterminants des matrices D et F suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice E est-elle inversible ?
2. Déterminer, si possible, l'inverse de E .
3. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} y & +z & = & 1 \\ 2x & +5z & = & 1 \\ x & +2y & +4z & = & 6 \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 9z = 1 \\ -3x + 5y - z = 12 \end{cases}$$

Exercice 4 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

1. Déterminer la multiplicité de la racine -1 .
2. Montrer que $2i$ est racine de P .
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Poser la division euclidienne de $P_1(X) = X^5 - 3X^3 + 2X^2 + 4X + 7$ par $D(X) = X^3 + 3X^2 + 1$.
2. Le polynôme $P_2(X) = X^3 - (12 + 2i)X + 8i - 16$ admet-il une racine réelle ?
3. Soient les polynômes $P_3(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$.
 - (a) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_1 tel que $\deg(P_3 \times Q_1) = 15$
 - (b) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_2 tel que $\deg(P_3 \circ Q_2) = 10$
 - (c) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_3 tel que $\deg(P_3 + Q_3) = 4$
4. Soient les polynômes $P_4(X) = X^3 + 6X^2 + 10X + 8$.
 - (a) Poser la division euclidienne de P_4 par $(X + 4)$.
 - (b) Donner la forme factorisée de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.