Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Correction
Vendredi 27 mars 2026 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 $\simeq$ ***15 min***

Déterminer (en justifiant par un calcul ou un raisonnement géométrique)

1. $\arccos(-1)$.
   La fonction arccos prend ses valeurs dans $[0, \pi]$. Comme $\cos(\pi) = -1$, on a :
   $$\boxed{\arccos(-1) = \pi}$$

2. $\arcsin(0)$.
   La fonction arcsin prend ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\sin(0) = 0$, on a :
   $$\boxed{\arcsin(0) = 0}$$

3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{37\pi}{4}\right)\right)$.
   On réduit $\frac{37\pi}{4}$ modulo 2π :
   $$\frac{37\pi}{4} = 10\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$
   Comme $-\frac{3\pi}{4} \notin [0, \pi]$, on utilise la parité du cosinus :
   $$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
   et $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$, donc :
   $$\boxed{\arccos\left(\cos\frac{37\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}}$$

4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{37\pi}{4}\right)\right)$.
   On a $\frac{37\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Comme $\frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on utilise :
   $$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
   et $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :
   $$\boxed{\arcsin\left(\sin\frac{37\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

5. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{37\pi}{4}\right)\right)$.

   La fonction tan est π-périodique. On réduit modulo π :

$$\frac{37\pi}{4} = 9\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

   Comme $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\boxed{\arctan\left(\tan\frac{37\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

6. $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

   $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\arccos(1) = 0$ (car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0, \pi]$) donc :

$$\boxed{\arccos\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

Exercice 2 $\simeq$ ***25 min***

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -5 & -12 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Matrice A (2×2) :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 7 \times (-12) - 13 \times (-5) = -84 + 65 = \boxed{-19}$$

   Matrice B (3×3) :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

   Développement par rapport à la première ligne :

$$\det(B) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -8 & -9 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= (-45 + 48) + 2\,(36 - 42) - 3(32 - 35) = 0$$

   Matrice C (4×4) :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On choisit la ligne 1 comme pivot puis on effectue les combinaisons de lignes suivantes
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
- $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

On obtient alors :

$$det(C) = det\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 3\\ 0 & -10 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -10 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Développement selon la ligne 3 :

$$\det(C) = -(-2)\det\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -10 & 4\\ 0 & -10 & 4\end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la colonne 1 :

$$\det(C) = 2\times(1)\times\det\begin{pmatrix}-10 & 4\\ -10 & 4\end{pmatrix} = \boxed{0}$$

2. Déterminer, si possible, les inverses des matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -2\\ -2 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Matrice D (3×3) :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Calcul du déterminant (règle de Sarrus) :

$$\det(D) = (1)(2)(-1) + (1)(1)(1) + (1)(1)(1) - (1)(2)(1) - (1)(1)(-1) - (1)(1)(1)$$
$$= -2 + 1 + 1 - 2 + 1 - 1 = -2 \neq 0$$

D est donc inversible. On applique la méthode de Gauss-Jordan sur $(D \mid I_3)$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3/(-2)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1\leftarrow L_1-L_3]{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Inverse de la matrice D (3×3) : Méthode 2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul du déterminant (règle de Sarrus) :

$$\det(D) = (1)(2)(-1) + (1)(1)(1) + (1)(1)(1) - (1)(2)(1) - (1)(1)(-1) - (1)(1)(1)$$
$$= -2 + 1 + 1 - 2 + 1 - 1 = -2 \neq 0$$

D est donc inversible. On utilise la formule :

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)}\, {}^t\mathrm{Co}(D)$$

où les cofacteurs sont $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, avec M_{ij} le mineur obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de D.

Calcul des 9 cofacteurs :

$$c_{11} = (+1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2)(-1) - (1)(1) = -3$$

$$c_{12} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\big[(1)(-1) - (1)(1)\big] = -(-2) = 2$$

$$c_{13} = (+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (2)(1) = -1$$

$$c_{21} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\big[(1)(-1) - (1)(1)\big] = -(-2) = 2$$

$$c_{22} = (+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -2$$

$$c_{23} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\big[(1)(1) - (1)(1)\big] = 0$$

$$c_{31} = (+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (1)(2) = -1$$

$$c_{32} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\big[(1)(1) - (1)(1)\big] = 0$$

$$c_{33} = (+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) - (1)(1) = 1$$

Matrice des cofacteurs puis transposée de la comatrice :

$$\mathrm{Com}(D) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies {}^t\mathrm{Com}(D) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(La matrice des cofacteurs est ici symétrique, elle est donc égale à sa propre transposée.)

Inverse :

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Matrice E (2×3) :

E est une matrice rectangulaire (2×3), elle n'est donc **pas carrée**. L'inverse n'existe pas. E **n'est pas inversible.**

Matrice F (2×2) :

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(F) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - (-2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

$\det(F) = 0$, donc F **n'est pas inversible.**

Exercice 3 $\simeq$ ***15 min***

Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$$

On réalise la combinaison de lignes : $L_1 - 2L_2$:

$$(4x + 3y) - (4x - 10y) = -1 - 14 \implies 13y = -15 \implies \boxed{y = -\frac{15}{13}}$$

On réalise la combinaison de lignes : $5L_1 + 3L_2$:

$$5(4x + 3y) + 3(2x - 5y) = -5 + 21 \implies 26x = 16 \implies \boxed{x = \frac{8}{13}}$$

On résout le système de taille 3 avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ 2x-3y+z=7 \\ -3x+5y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=-4 & \text{pivot} \\ -5y+5z=15 & L_2-2L_1 \\ 8y-5z=-12 & L_3+3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=-4 \\ -y+z=3 & \frac{1}{5}L_2 \\ 8y-5z=-12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=-4 \\ -y+z=3 & \text{pivot} \\ 3z=12 & L_3+8L_2 \end{cases}$$

On trouve z puis y puis x :

$$\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ -y+z=3 & \text{pivot} \\ z=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=-4 \\ -y+4=3 & \Rightarrow y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1-8=-4 & \Rightarrow x=3 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\textbf{Solution :} \quad (x,y,z)=(3,\,1,\,4)$$

Exercice 4 $\simeq$ ***20 min***

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant (toute réponse non justifiée ne rapporte rien)

1. -2 est racine double de $P_1(X)=X^4+12X^3+48X^2+80X+48$. On calcule $P_1(-2)$, $P_1'(-2)$, $P_1''(-2)$, $P_1'''(-2)$:

$$\begin{aligned} P_1(-2) &= 16-96+192-160+48=0 \quad \checkmark \\ P_1'(X) &= 4X^3+36X^2+96X+80 \\ P_1'(-2) &= -32+144-192+80=0 \quad \checkmark \\ P_1''(X) &= 12X^2+72X+96 \\ P_1''(-2) &= 48-144+96=0 \quad \checkmark \\ P_1^{(3)}(X) &= 24X+72 \\ P_1^{(3)}(-2) &= -48+72=24\neq 0 \end{aligned}$$

-2 est racine de multiplicité **3**, pas 2.
FAUX.

2. Le reste de la division euclidienne de $P_2(X) = (X^2+X+1)(X-3)(X+4)$ par $D(X) = X^2+X+1$ est $R(X) = (X-3)(X+4)$.
   On a $P_2(X) = D(X) \cdot (X-3)(X+4) + 0$. Le reste de la division euclidienne est **0**, pas $(X-3)(X+4)$.
   FAUX.
3. Le polynôme $P_3(X) = X^3 + 3X^2 + 2iX^2 + 4X - iX - i + 2$ n'admet pas de racine réelle.
   On regroupe en parties réelle et imaginaire pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$P_3(x) = \underbrace{\left(x^3 + 3x^2 + 4x + 2\right)}_{\text{partie réelle}} + i\,\underbrace{\left(2x^2 - x - 1\right)}_{\text{partie imaginaire}}$$
   Pour x racine réelle, il faut simultanément :
   $$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$
   Partie réelle : $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)(x^2+2x+2)$. Les racines réelles possibles sont $x = -1$ (le discriminant de $x^2 + 2x + 2$ est $-4 < 0$).
   On vérifie pour $x = -1$ dans la partie imaginaire :
   $$2(-1)^2 - (-1) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$$
   Aucune valeur réelle n'annule simultanément les deux parties.
   VRAI.
4. Soit le polynôme $P_4(X) = X^3 - 11X + 20$. On a $P_4(2+i) = 0$ et $P_4(2-i) = 0$.
   Posons $z = 2+i$. Alors $z^2 = 3 + 4i$ et $z^3 = z^2 \cdot z = (3+4i)(2+i) = 6 + 3i + 8i - 4 = 2 + 11i$.
   $$P_4(2+i) = (2+11i) - 11(2+i) + 20 = 2 + 11i - 22 - 11i + 20 = 0 \quad \checkmark$$
   Comme $P_4 \in \mathbb{R}[X]$, les racines complexes viennent en paires conjuguées, donc $P_4(2-i) = 0$ également.
   VRAI.
5. Il existe des polynômes Q_1 et Q_2 tels que : $deg(Q_1) = deg(Q_2)$ et $deg(Q_1 \circ Q2) = 7$.
   Si $\deg(Q_1) = \deg(Q_2) = n$, alors $\deg(Q_1 \circ Q_2) = n^2$. Il faudrait $n^2 = 7$, or 7 n'est pas un carré parfait.
   FAUX.
6. Il n'existe pas de polynôme qui vérifie toutes les propositions suivantes :
   - $P \in \mathbb{R}[X]$.
   - $deg(P) = 4$
   - 1 est racine double de P
   - 1+i est racine double de P.

Si $1+i$ est racine double de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors son conjugué $1-i$ est aussi racine double (les coefficients sont réels). Un tel polynôme aurait au minimum :
$$(X-1)^2(X-(1+i))^2(X-(1-i))^2 \quad \text{de degré } 6 > 4$$
Ce qui est incompatible avec $\deg(P) = 4$.
VRAI.

Exercice 5 $\simeq$ ***15 min***

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 - 26X^2 + 190X - 300$.

1. Poser la division euclidienne de P par $D(X) = X^2 + X - 30$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -5X^3 & -26X^2 & +190X & -300 & X^2 \quad +X \; -30 \\
\cline{6-6}
-(X^4 & +X^3 & -30X^2) & & & X^2 \; -6X \; +10 \\
\cline{1-3}
 & -6X^3 & +4X^2 & +190X & -300 & \\
 & -(-6X^3 & -6X^2 & +180X) & & \\
\cline{2-4}
 & & 10X^2 & +10X & -300 & \\
 & & -(10X^2 & +10X & -300) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc

$$\boxed{P(X) = (X^2 + X - 30)(X^2 - 6X + 10)}$$

2. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}$.
Factorisation de $X^2 + X - 30$:

$$\Delta = 1 + 120 = 121 \implies x = \frac{-1 \pm 11}{2} \implies x = 5 \text{ ou } x = -6$$

$$X^2 + X - 30 = (X - 5)(X + 6)$$

Factorisation de $X^2 - 6X + 10$:

$$\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$$

Ce trinôme n'a pas de racine réelle et est irréductible sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{P(X) = (X - 5)(X + 6)(X^2 - 6X + 10) \quad \text{dans } \mathbb{R}}$$

3. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}$.
Racines de $X^2 - 6X + 10$ dans $\mathbb{C}$:

$$x = \frac{6 \pm i\sqrt{|-4|}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

$$\boxed{P(X) = (X - 5)(X + 6)(X - (3 + i))(X - (3 - i)) \quad \text{dans } \mathbb{C}}$$

4. P admet-il une racine de multiplicité 2 ?
Les racines de P sont 5, -6, $3 + i$ et $3 - i$, toutes distinctes et chacune de multiplicité 1.
Donc **Non**, P n'admet pas de racine de multiplicité 2.