

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 23 mai 2025 - Durée : 1h10

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1} e^{\ln(t+1)} dt$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1} e^{\ln(t+1)} dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1} \times (t+1) dt = \int_0^1 1 dt = 1$$

2. $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(3t) dt$

Pour calculer I_2 on linéarise la fonction. On obtient que

$$\sin^2(3t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(6t)$$

Donc

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(6t) \right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \sin(6t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12} \sin(3\pi) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} \sin(-3\pi) = \frac{\pi}{2}$$

3. $I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \cos^4(3x) dx$

La fonction sin est impaire et la fonction cos est paire. Donc la fonction $f(x) = \sin(3x) \cos^4(3x)$ est impaire. Or l'intervalle d'intégration est centré en 0. Donc

$$I_3 = 0$$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{2t^2 + t}{(t^2 + 1)(t - 2)} dt$

Il faut faire une D.E.S de la fonction :

$$\frac{2t^2 + t}{(t^2 + 1)(t - 2)} = \frac{at + b}{t^2 + 1} + \frac{c}{t - 2}$$

calcul de c : on multiplie par $(t - 2)$ puis on pose $t = 2$: $c = \frac{10}{5} = 2$

calcul de a : on multiplie par t puis on fait tendre $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^3}{t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{at^2}{t^2} + \frac{ct}{t} \Rightarrow 2 = a + c$$

Donc $a = 0$.

calcul de b : on pose $t = 0$: $0 = b - \frac{c}{2}$ donc $b = 1$

Donc

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{2}{t - 2} dt = [\arctan(t) + 2 \ln |t - 2|]_0^1 = \arctan(1) + 2 \ln(1) - \arctan(0) - 2 \ln(2) = \frac{\pi}{4} - 2 \ln(2)$$

5. $I_5 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx$ on pourra poser $x = t^2$ Posons le changement de variable :
Les nouvelles bornes sont

$$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1 \quad x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$$

La relation entre dx et dt est :

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

Donc

$$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{t(t^2+1)} 2t dt = \int_1^2 \frac{2}{t^2+1} dt = [2 \arctan(t)]_1^2 = 2 \arctan(2) - 2 \arctan(1) = 2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2}$$

6. $I_6 = \int_0^1 \arctan(x) dx$

On calcule l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. On pose

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \arctan(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Donc

$$I_6 = \int_0^1 \arctan(x) dx = [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \arctan(1) - 0 - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$$

Exercice 2

1. Calculer $J_1 = \int_0^1 |-3t+1| dt$

On découpe l'intégrale :

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} -3t+1 dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 3t-1 dt = \left[-\frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{3}{2}t^2 - t \right]_{\frac{1}{3}}^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 0 + \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

2. Calculer $J_2 = \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{x}\right) dt$

$$J_2 = \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{x}\right) dt = \left[x \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^\pi = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

3. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 7]$:

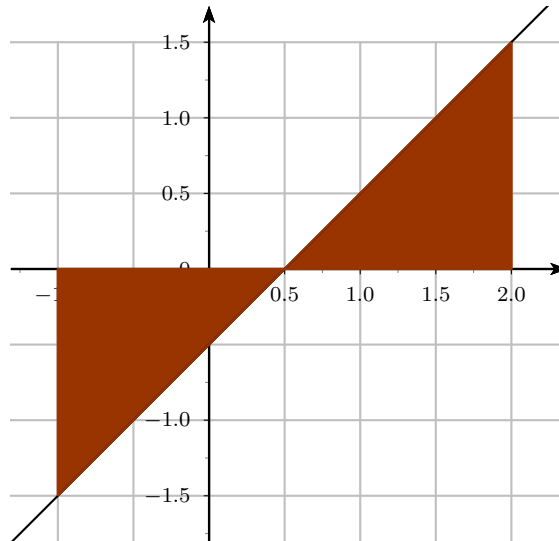
- g est périodique de période 3
- $g(x) = x - 1$ sur l'intervalle $[0, 2[$
- $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$

La fonction est de période 3 et l'intervalle est de largeur 9. L'intégrale sur $[-2; 7]$ est donc 3 fois l'intégrale sur $[0; 3]$.

$$J_3 = \int_{-2}^7 g(x) dx = 3 \int_0^3 g(x) dx = 3 \left(\int_0^2 (x-1) dx + \int_2^3 -1 dx \right) = 3(0-1) = -3$$

4. Donner un exemple de fonction f non-nulle telle que $\int_{-1}^2 f(t)dt = 0$.

Il suffit de prendre la fonction $f(t) = t - \frac{1}{2}$.



Exercice 3

1. Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

(a) $\frac{3t^2 + t}{(t^4 - 1)(t + 5)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3t^2 + t}{(t^4 - 1)(t + 5)} \cdot t^3 \right) = 3 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Équivalence fausse}$$

(b) $\ln(1 + t) \underset{+\infty}{\sim} t$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 0 \text{ (par croissances comparées)} \quad \Rightarrow \quad \text{Équivalence fausse}$$

(c) $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$

On considère la fonction $f(t) = e^t$

Sa dérivée en $t = 0$ est donnée par la définition

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}$$

Or, on sait que $f'(t) = e^t \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Équivalence vraie}$$

2. Déterminer si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes :

(a) $K_1 = \int_{-1}^{+\infty} \frac{2}{(3t+2)^2+1} dt$

On donne un équivalent de la fonction :

$$\frac{2}{(3t+2)^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{9t^2}$$

Or, d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Donc K_1 converge aussi par équivalence.

remarque : Le facteur $\frac{2}{9}$ ne change pas la nature de l'intégrale de Riemann.

(b) $K_2 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

On donne un équivalent de la fonction :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or, d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ diverge.

Donc K_2 diverge aussi par équivalence.

3. Calculer K_1 et K_2 si elles convergent.

On ne calcule pas K_2 qui diverge.

Calculons K_1 :

$$K_1 = \frac{2}{3} \int_{-1}^{+\infty} \frac{3}{(3t+2)^2+1} dt = \frac{2}{3} \left[\arctan(3t+2) \right]_{-1}^{+\infty} = \frac{2}{3} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(3t+2) - \arctan(-1) \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc } K_1 = \frac{\pi}{2}$$