universite PARIS-SACLAY | IUT DE CACHAN

GEII

Mathématiques

Semestre 3

Travaux Dirigés
Mathématiques appliquées

Année 2025–2026

Nom :
Prénom :
Groupe :

Table des matières

En mathématiques, on ne peut pas vous mentir, on ne peut pas v248ous tromper.
Sylvia Serfaty

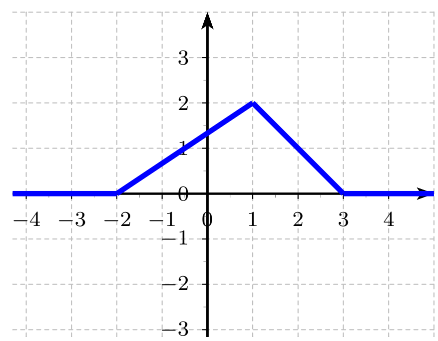
Chapitre 1

Révisions sur le calcul intégral

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} I + \alpha t \mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^{2} 2t^5 - 5t^3 + 4t \mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3}{1-2x} \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3} \mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{3x^2} \mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+9} \mathrm{d}t$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ *où* f *est la fonction définie par le graphe suivant*



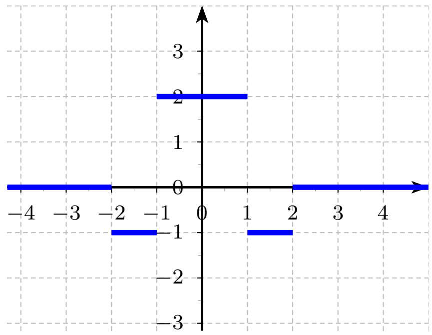
Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(4x)\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\cos(3x)\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(t)\cos(x)\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(t)\cos(x)\mathrm{d}x$

Exercice 3

On considère la fonction définie par le graphe suivant



1. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$
2. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$ *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$*)*
3. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$ *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$*)*

Exercice 4

Calculer

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t)\cos(3t)\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(6t)\cos^2(5t)\mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos(3t)\mathrm{d}t$
5. $M = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$

Exercice 5

Calculer

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2-3x+2}dx$
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+3}{(x-2)(x^2-4)}dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3+2}{x^3-x^2+x-1}dx$

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (1-t)e^{t-3}\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)\mathrm{d}x$

On rappelle que la dérivée de arcsin *est* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 7

1. *Calculer* $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x$
2. *Calculer* $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ *en posant* $x = \mathrm{e}^u$.

Compléments

Exercice 8 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)dx$
2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^4\tan^5(t)dt$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$
5. $M = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
6. $N = \displaystyle\int_2^3 \frac{5x^2+21x+22}{(x+3)(x^2+2x-3)}dx$
7. $O = \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx$
8. $P = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx$ *(on pourra poser* $u = \sin(x)$*)*
9. $Q = \displaystyle\int_1^e \frac{2y^6+3}{y^5+7}dz$

Exercice 9

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$$

Exercice 10

Soit $0 < a < b$, *calculer l'intégrale suivante :*

$$J = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

On pourra poser $t = a\cos^2(u) + b\sin^2(u)$.

Exercice 11

Déterminer une primitive de la fonction suivante :

$$f(x) = (x^2 - x + 3)e^{2x}$$

Chapitre 2

Suites et séries numériques

Exercice 1

Calculer les 3 premiers termes de la suite (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$) :

1. $U_{n+1} = 2U_n + 1$,
2. $U_{n+1} = 2^{U_n} + 1$,
3. $U_{n+1} = 2U_n + n$.

Exercice 2

Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$).

1. $U_n = \frac{2}{3^n}$,
2. $U_{n+1} = U_n + 5$,
3. $U_{n+1} = 5U_n + 1$,
4. $U_n = 2 + n$,
5. $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$.

Exercice 3

Montrer que les suites sont des suites géométriques et les écrire sous la forme $U_0 \times q^n$ puis déterminer la limite en $+\infty$.

1. $U_n = 2^{n+1}$,
2. $U_n = (\sqrt{2})^{3n}$,
3. $u_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{-2n}$,
4. $u_n = \frac{2^n}{3^{2n}}$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 5k + 4$,
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{6} 3 \times 2^n$,

Exercice 5

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k$. Dans chacun des cas suivants, exprimer S_N en fonction de N puis en déduire $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N$.

1. $u_n = 0.1$
2. $u_n = n$
3. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$
4. $u_n = 2^n$
5. $u_n = (-1)^n$

Exercice 6

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   (a) *En remarquant que, pour tout* $k \in \{1 \dots N\}$ *on a* $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$ *; Montrer que* $S_N \geq \sqrt{N}$.
   (b) *Calculer* $\lim_{N \to \infty} S_N$. *La série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *est-elle convergente ?*
2. *Soit* $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
   (a) *Montrer que :* $H_4 \geq 2$, $H_8 \geq \frac{5}{2}$ *et* $H_{16} \geq 3$.
   On admet que $\forall n \geq 2$, $H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$.
   (b) *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ *diverge.*

Exercice 7

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *Considérons la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$. *On note* $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k$.
   (a) *Calculer* S_1, S_2, S_3.
   (b) *Déterminer deux réels a et b tels que, pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{a}{n+2} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (c) *Exprimer* S_N *en fonction de* N *puis en déduire* $\lim_{N \to \infty} S_N$.
2. *Pour tout* $N \geq 2$, *on pose*

$$S_N = \sum_{k=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

   (a) *Calculer* S_2, S_3, S_4.
   (b) *Montrer que :* $\forall k \geq 2,\ u_k = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)$.
   (c) *En déduire l'expression de* $S_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} u_k$ *en fonction de* N, *puis la valeur de la somme* $S = \lim_{N \to \infty} S_N$.

Exercice 8

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \dfrac{3}{2^n}$
2. $\sum \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
3. $\sum 5^{-n}$
4. $\sum 2^{-4n+3}$
5. $\sum \dfrac{2^n - 3}{3^n + 4}$

Exercice 9

1. *Les suites* U_n *et* V_n *sont elles équivalentes en* $+\infty$ *?*

(a) $U_n = \dfrac{2n+3}{n-2}$ *et* $V_n = 2$

(b) $U_n = \dfrac{n^2}{2n^3 - 3n^2 + 1}$ *et* $V_n = \dfrac{1}{n}$

(c) $U_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et* $V_n = \dfrac{1}{n}$

(d) $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$ *et* $V_n = \dfrac{1}{n^3}$

2. *Pour chacun des cas précédent, en déduire la nature des séries de termes général* U_n.

Exercice 10

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

1. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum \dfrac{1}{n!}$
3. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$
4. $\sum \dfrac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}}$

Compléments

Exercice 11

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* q *et de premier terme* U_0.

1. *Déterminer* q *et* U_0 *sachant que* $U_3 = \dfrac{1}{32}$ *et* $U_6 = \dfrac{1}{2048}$.
2. *Déterminer, en fonction de* N*, la valeur de* $S_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} U_k$.
3. *Que vaut la limite de* S_N *quand* N *tend vers* $+\infty$ *?*

Exercice 12

Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n *en fonction de* n.

1. (u_n) *est une suite arithmétique telle que :* $u_3 = 2$ *et* $u_{11} = 0$.
2. (u_n) *est une suite géométrique de raison* q *telle que :* $q = 2$ *et* $u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 510$.

Exercice 13 *Soit la série :*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

1. *Calculer S_1, S_2 et S_3.*
2. *Exprimer S_N en fonction de N.*
3. *En déduire la nature de la série.*

Exercice 14 *les questions suvantes sont indépendantes.*

1. *Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :*

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^3}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^7}{(\sqrt{n}+3)(n^2+2)^4}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n\left(\frac{1}{3n+1}\right)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^2}{9}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1,1)^n}$

2. *Donner un exemple de suite géométrique (U_n) telle que la série de terme général U_n converge vers la valeur -2 : i.e.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = -2$.

Exercice 15

1. *On sait que la série de terme général $U_n = 3^{-2n+1}$ converge. Que vaut* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *?*
2. *On sait que la série de terme général* $V_n = \dfrac{1}{n^2+5n+6}$ *converge. Que vaut* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *?*
3. *Donner un exemple de suite (W_n) telle que la série de terme général W_n converge vers 7 :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = 7$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

Exercice 1

Mettre sous la forme $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, *avec* $A > 0$, *les signaux suivants :*

1. $s(t) = \cos(5\pi t) + \sin(5\pi t)$
2. $s(t) = \cos(25\pi t) + \sqrt{3}\sin(25\pi t)$
3. $s(t) = -\sin(3\pi t)$
4. $s(t) = -3\cos(-2\pi t)$

Exercice 2

Représenter les spectres de phase (par rapport au sinus) et d'amplitude de chaque signal temporel :

1. $f(t) = 6\cos(10\pi t) - 5\cos(20\pi t) + 3\cos(30\pi t) + \sqrt{3}\cos(40\pi t)$
2. $f(t) = -2 + 4\sqrt{2}\sin(50\pi t) + 2\sqrt{2}\sin(100\pi t) + \sqrt{2}\sin(200\pi t) - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin(300\pi t)$
3. $f(t) = 2 + 3\cos(100\pi t) + 5\cos(200\pi t) + 5\sin(200\pi t) + \sqrt{3}\cos(400\pi t) - \sin(400\pi t) + 4\sin(800\pi t)$
4. $f(t) = \dfrac{1}{2} + \cos(\omega t) + 5\cos(2\omega t) + 5\sin(2\omega t) + \sin(3\omega t) - \cos(3\omega t) - \sqrt{2}\cos(4\omega t)$

Exercice 3

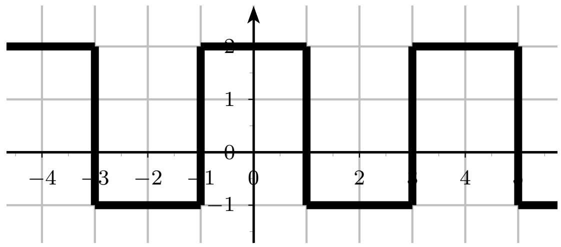
Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

1. $f(t) = \cos(2\pi t)$
2. $f(t) = -4 + 5\sin(3\pi t)$
3. f *est de période 2 avec* $f(t) = t$ *sur* $[0, 2[$
4. f *est de période 2 avec* $f(t) = t$ *sur* $[-1, 1[$

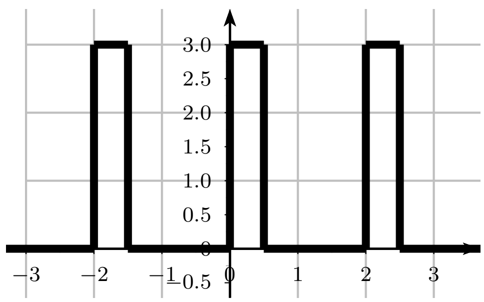
Exercice 4

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

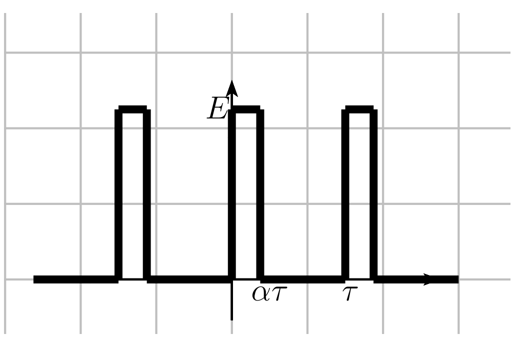
1.



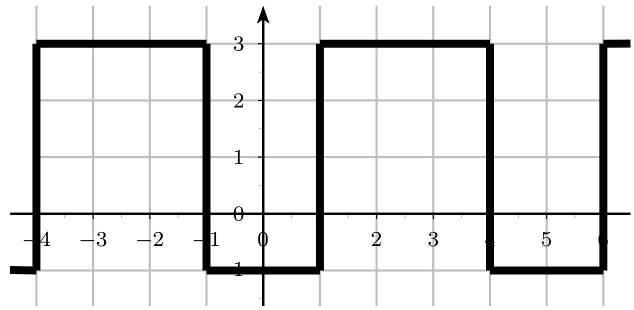
2.



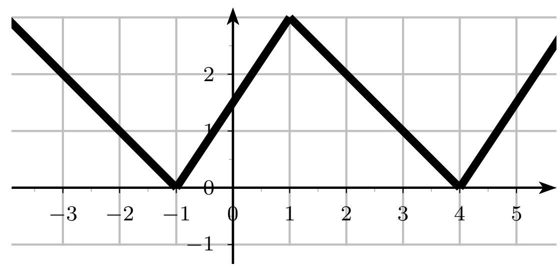
3.



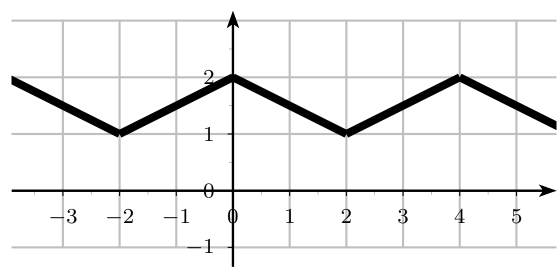
4.



5.



6.

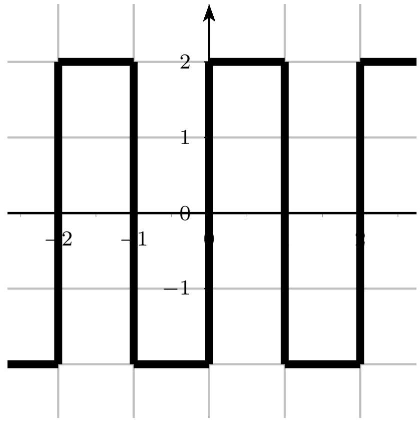


Exercice 5

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer l'énergie moyenne.

1. $f(t) = \cos(2\pi t)$
2. f *est de période* 2π *avec* $f(t) = 2$ *sur* $[0, \pi[$ *et* $f(t) = 0$ *sur* $[\pi, 2\pi[$
3. f *est de période 2 avec* $f(t) = t$ *sur* $[0, 2[$

Exercice 6 *On considère le signal temporel* s *suivant :*



1. *Quelle(s) propriétés peut-on donner ? (périodicité, parité, amplitude...)*
2. *Quelle est la valeur moyenne du signal ?*
3. *Calculer les coefficients de Fourier de ce signal.*
4. *Donner les spectres de phase et d'amplitude des 5 premières harmoniques de la série de Fourier.*
5. *On appelle S_N la fonction définie sur $[-2;2]$ par*

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de s.

(a) *Tracer à la main S_2 sur $[-2;2]$.*

(b) *À l'aide d'un logiciel graphique, représenter la fonction S_6 sur $[-2;2]$.*

Exercice 7

On considère la fonction f périodique, de période 2π et telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [0;2\pi[$.

1. *Calculer les coefficient de Fourier de f puis écrire le développement en série de f.*
2. *Tracer le spectre de module des 4 premières harmoniques du développement en série de Fourier de f.*
3. *Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie par : $g(t) = t$ sur $[-\pi;\pi[$.*
4. *En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction f et une valeur judicieusement choisie de t, déduire un développement en série numérique de $\frac{\pi}{4}$.*

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,\pi[\\ 0 \text{ si } x = \pi \end{cases}$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.*
2. *En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.*

Exercice 9

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f(t) = 2 + \cos(t) + \sin(2t)$.

Exercice 10

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin(t)|$.

1. *Déterminer la série de Fourier de u.*
2. *Déduire du développement en série de Fourier de u, les développements en série de Fourier des fonctions g et h définies par*

$$g(t) = |\cos(t)| \quad \text{et} \quad h(t) = \max\{0, \sin(t)\}$$

Exercice 11

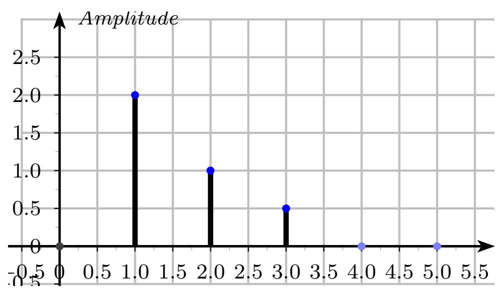
Les questions suivantes sont indépendantes

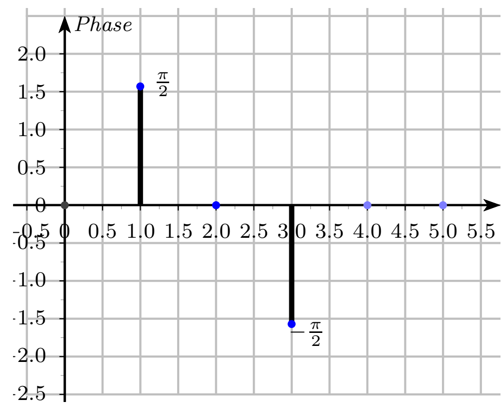
1. *Soit le signal suivant :*

$$f(t) = 2\cos(50\pi t) - \cos(100\pi t) + \sin(100\pi t) - 3\sin(200\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(300\pi t) + \frac{1}{4}\sin(300\pi t)$$

Tracer le spectre d'amplitude du signal.

2. *On considère les spectres d'amplitudes et de phases (par rapport au cosinus), tracé en fonction des pulsations, suivants :*





Donner un exemple de fonction dont les spectres correspondent aux spectres ci-dessus.

3. *Déterminer une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier vérifient :*

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 2 \qquad b_1 = -1 \qquad a_3 = 4$$

4. *On connaît les coefficients de Fourier exponentiels d'un signal f :*

$$c_n = \frac{1}{2i\pi n} \times e^{in\frac{\pi}{2}}$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Exercice 12

Soit f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} e^t & si \quad t \in]-\pi, \pi[\\ \dfrac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} & si \quad t = \pi \end{cases}$$

Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

Exercice 13

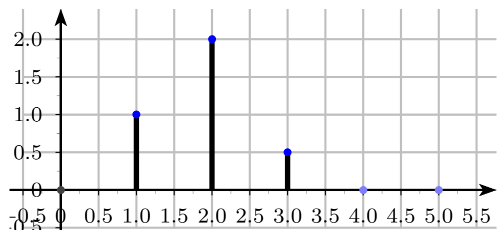
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f \text{ est périodique de période } 2 \\ f(t) = \dfrac{t}{2} \text{ pour } 0 \leq t < 1 \\ f(t) = 1 - \dfrac{t}{2} \text{ pour } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. *Représenter f sur l'intervalle $[-2; 2]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*
3. *Tracer le spectre d'amplitude des 4 premières harmoniques de la série de Fourier de f.*
4. *Calculer $U_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f^2(t)\mathrm{d}t$.*
5. *Calculer $V_{eff}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ et comparer ce résultat à U_{eff}^2.*

Exercice 14

Soit f un signal 2π périodique de valeur moyenne nulle. On donne le spectre d'amplitude de f :



Déterminer la valeur de l'énergie moyenne $E(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 15

Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0; 2\pi[$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad t \in [0; \pi] \\ 0 & si \quad t \in]\pi; 2\pi[\end{cases}$$

Et soit h le signal défini par $h(t) = f(-t) + f(t)$.

1. *Représenter f puis h sur $[-2\pi; 2\pi]$.*
2. *Sachant que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont :*

$$\begin{cases} a_0 = & \dfrac{\pi}{4} \\ a_n = & \dfrac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\ b_n = & \dfrac{-1}{n}(-1)^n \end{cases}$$

   Montrer que la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nt).$$

3. *Calculs de sommes :*
   (a) *En posant $t = 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$.*
   (b) *En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.*
   (c) *Calculer l'énergie moyenne de h.*
   (d) *Grâce à l'identité de Parseval appliquée à h, montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.*

Compléments

Exercice 16

1. *Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par : $f_1(x) = e^x$.*
2. *Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$ par : $f_2(x) = e^x$.*
3. *Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique et paire définie sur $[0, \pi]$ par : $f_3(x) = e^x$.*

Exercice 17

1. *Développer en série de Fourier la fonction f de période T définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ pour } 0 < t < \tau \\ f(t) = 0 \text{ pour } \tau < t \leq T \end{cases}$$

2. *Déterminer A_n et φ_n pour que le terme général de cette série se mette sous la forme*

$$u_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

3. *Donner alors la valeur de $\dfrac{\tau}{T}$ pour que seules subsistent les harmoniques impaires dans ce développement.*
4. *A l'aide de la formule de Parseval, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.*
5. *En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Exercice 18

On considère la fonction f périodique, de période 2π et telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [0; 2\pi[$.

1. *Calculer les coefficient de Fourier de f puis écrire le développement en série de f.*
2. *Tracer le spectre de module des 4 premières harmoniques du développement en série de Fourier de f.*
3. *Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie par : $g(t) = t$ sur $[-\pi; \pi[$.*
4. *En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction f et une valeur judicieusement choisie de t, écrire $\dfrac{\pi}{4}$ souq la forme d'une série numérique.*

Exercice 19

On note f la fonction impaire de période 2π, avec

$$\begin{cases} f(t) = -1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ f(t) = 0 \text{ si } 1 < t < \pi \end{cases}$$

On note $S(t)$ la série de Fourier de f : $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

Calculer les coefficients de Fourier, comparer $f(t)$ et $S(t)$. Calculer $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacun des items suivants :

1. *On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.*
2. *On a $b_n = -\frac{4}{n}\sin^2(n)$.*
3. *La série $S(t)$ converge en tout t vers $f(t)$*
4. *On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin^3\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.*
5. *La formule de Parseval donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin^4\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{16}$.*

Exercice 20

1. *Soit le signal f, 2π-périodique, défini sur $[0; 2\pi[$ par*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad t \in [0; \pi] \\ 0 & si \quad t \in]\pi; 2\pi[\end{cases}$$

   (a) *Représenter f sur $[-2\pi; 2\pi]$.*
   (b) *Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.*
   (c) *Écrire la série de Fourier de f*

2. *On considère la fonction périodique définie par $g(t) = f(-t)$.*
   (a) *Représenter g sur $[-2\pi; 2\pi]$.*
   (b) *Sans calculer ses coefficients, écrire la série de Fourier de g*

3. *On considère la fonction périodique définie par $h(t) = g(t) + f(t)$.*
   (a) *Représenter h sur $[-2\pi; 2\pi]$.*
   (b) *Montrer que la série de Fourier de h est*

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt)$$

   (c) *En remplaçant t par 0 dans l'expression de Fourier de h, déterminer la valeur de la limite de la série convergente suivante :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Chapitre 4

Produit de convolution

Exercice 1

1. *Représenter les signaux suivantes :*

   (a) $f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$

   (b) $f(t) = \cos(t)\delta(t - \frac{\pi}{3})$

   (c) $f(t) = \mathcal{U}(t-1)$

   (d) $f(t) = t\mathcal{U}(t) - t\mathcal{U}(t-1)$

   (e) $f(t) = \dfrac{t}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\delta(t-k)$

   (f) $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\cos(t)\,\delta\left(t - \frac{k\pi}{6}\right)$

2. *Calculer les "intégrales" suivantes :*

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(t)\delta(t)$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\delta(t - \frac{\pi}{6})$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\mathcal{U}(t-2)dt$

Exercice 2

On souhaite déterminer le produit de convolution du couple de signaux suivants :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ si\ t \in [-1;3] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

et

$$g(t) = \begin{cases} 1+t \ si\ t \in [0;2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer ce produit de convolution graphiquement.*
2. *Retrouver ce résultat par le calcul intégral.*

Exercice 3

Calculer le produit de convolution entre f et g :

1. $f(t) = (1-t)\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = e^{t}\mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = e^{-at}$ *et* $g(t) = e^{-bt}$ *en fonction des réels a et b*
3. $f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$
4. $f(t) = 1$ *et* $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Exercice 4

Le signal f est un cosinus auquel on a ajouté un « bruit »

$$f(t) = \left(\cos(t) + \frac{1}{5}\cos(10t)\right)\mathcal{U}(t)$$

1. *Représenter la courbe de f.*
2. *Calculer le produit de convolution entre f et $g(t) = \mathcal{U}(t)$*
3. *Tracer la courbe de $f \star g$ et en déduire l'intérêt du produit de convolution.*

Exercice 5

Calculer la dérivée du produit de convolution de $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ par $g(t) = (e^{2t} - 1)\mathcal{U}(t)$.

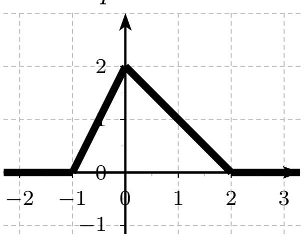
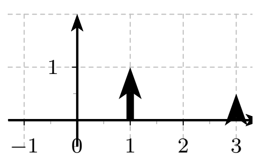
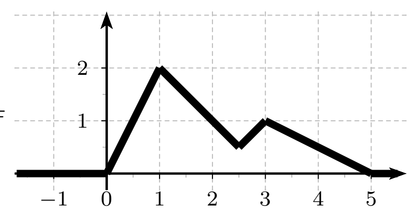
Exercice 6

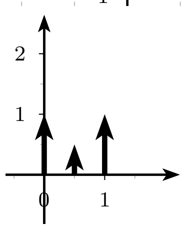
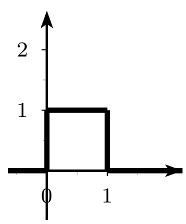
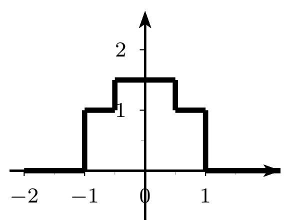
Tracer le produit de convolution de x par h pour chacun des couples suivants :

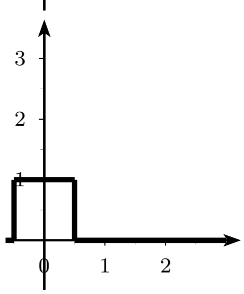
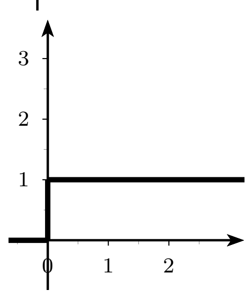
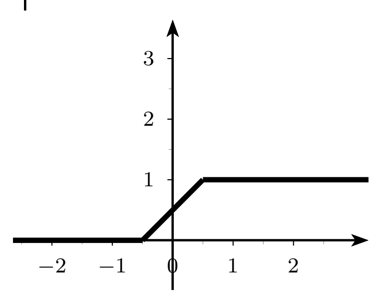
1. $x(t) = e^{-|t|}$ *et* $h(t) = \delta(t-3)$
2. $x(t) = \begin{cases} 1+t \text{ si } t \in [-1;0] \\ 1-t \text{ si } t \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ *et* $h(t) = 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$

Exercice 7

Dire si les produits de convolution suivant sont vrais ou faux en justifiant :

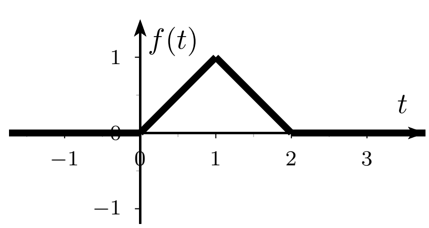
1.  $\star$  $=$ 

2.  $\star$  $=$ 

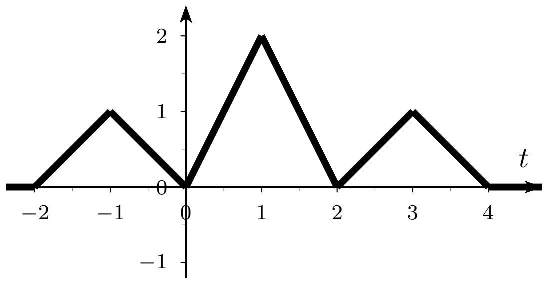
3.  $\star$  $=$ 

Exercice 8

Soit f la fonction définie par le graphe suivant :

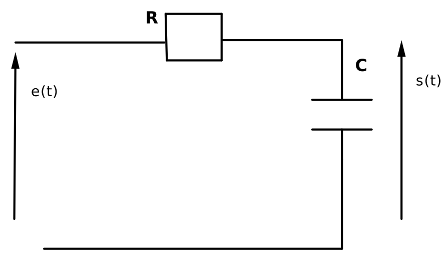


Déterminer le signal g telle que le graphe de $f * g$ soit le suivant :



Exercice 9

Soit le circuit électrique :



Avec C non chargé initialement.

1. *Montrer que le signal $s(t)$ vérifie l'équation différentielle :*

$$(E) \qquad RC\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

2. *Résoudre (E) à l'aide de la transformée de Laplace pour $e(t) = \delta(t)$ (on pose $s(0) = 0$). On note $h(t)$ cette solution, c'est la réponse impulsionnelle du filtre.*
3. *Calculer $h \star \mathcal{U}$ puis la tracer pour $C = 2\mu F$, $R = 470K\Omega$. Que représente cette fonction ?*

Exercice 10

Soit la fonction $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ dans le domaine de Laplace.

1. *Rappeler la transformée inverse des fonctions $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{p+1}$.*
2. *En utilisant le produit de convolution, calculer la transformée inverse de F.*
3. *Retrouver ce résultat en utilisant la décomposition en éléments simples.*

Exercice 11

En utilisant le produit de convolution retrouver l'original en Laplace des fonctions suivantes

1. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.
2. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$.
3. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)}$.

Compléments

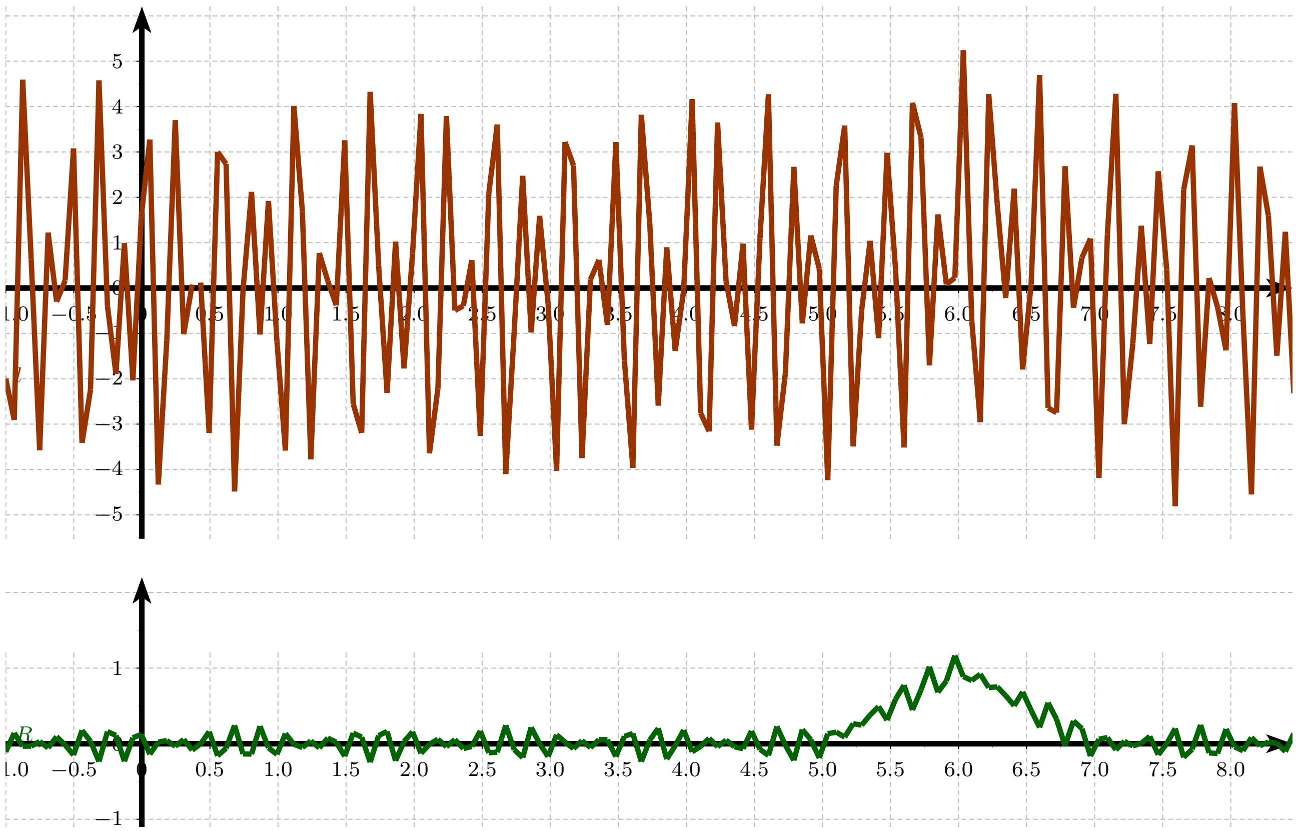
Exercice 12

1. *Calculer le produit de convolution de* $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$ *par* $g(t) = t\mathcal{U}(t)$
2. *Soient les fonctions* $f(t) = \Pi(t-1)$ *et* $g(t) = \Pi(t)$*. Calculer* $f * g(-1)$ *et* $f * g(1)$*.*

Exercice 13

On cherche à déterminer la distance à laquelle se trouve une cible (réfléchissante). On dispose d'un dispositif émetteur/récepteur (radar) qui envoie une onde et reçoit l'écho réfléchi par la cible. On suppose que l'émetteur envoie un signal porte $f(t) = \Pi(t)$*. Le signal qui revient au radar, et donc perçu par la partie récepteur du dispositif, sera alors* $g(t) = \Pi(t - t_0) + e(t)$ *où* $e(t)$ *est le bruit lié à la transmission.*

1. *Que représente* t_0 *dans le signal reçu ?*
2. *Calculer le filtrage de* g *par* f *(autrement dit* $f \star g$*) pour* $e(t) = 3\sin(11\pi t) + 2\cos(7\pi t)$*.*
3. *Les graphes ci-dessous représentent les courbes de* g *et de* $f \star g$ *pour une certaine valeur de* t_0*. Déterminer par lecture graphique la valeur de* t_0 *et en déduire la distance entre l'émetteur et la cible.*



Exercice 14

Calculer $f \star g$ *:*

1. $f(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$ *et* $g(t) = \Lambda(t+1)$
2. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-1)$ *et* $g(t) = \mathcal{U}(t+1)$

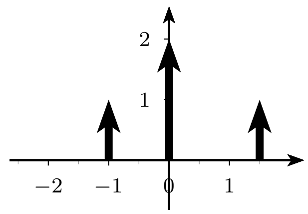
Exercice 15

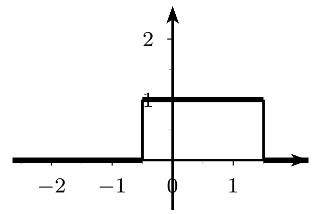
1. *Dans chacun des cas, déterminer le produit de convolution* $f \star g$*.*

(a) $f(t) = t^2\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = (2t-3)\mathcal{U}(t)$.

(b) $f(t) = \delta(t) + e^{2t}\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$.

2. Soient f *et* g *les signaux définies par leur représentation graphique :*





Tracer, sans justifier, la courbe de $f \star g$.

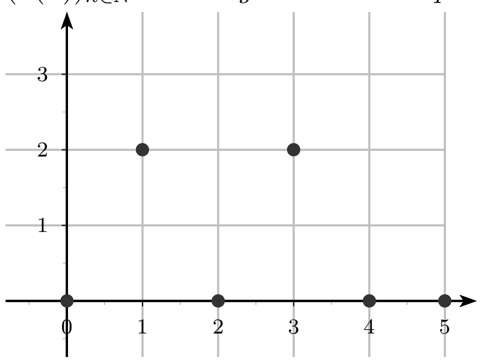
Chapitre 5

Transformée en $\mathcal{Z}$

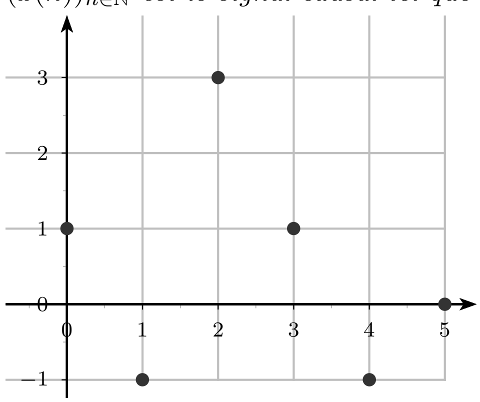
Exercice 1

Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque signal :

1. $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est le signal causal tel que* $\forall n \geq 4,\ x(n) = 0$ *et dont le graphe est :*



2. $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est le signal causal tel que* $\forall n \geq 5,\ x(n) = 0$ *et dont le graphe est :*



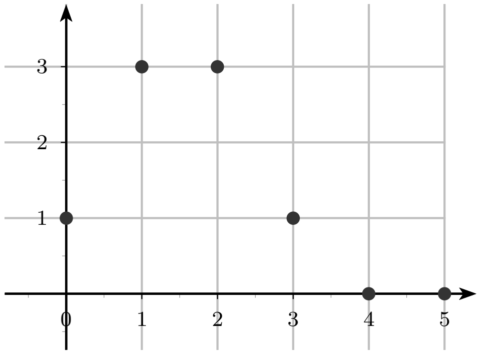
Exercice 2

Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque signal (on commencera par tracer l'allure du signal).

1. $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$
2. $x(n) = 2^n \mathcal{U}(n)$
3. $x(n) = (-1)^n \mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 3

On considère le signal causal $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *suivant, où* $\forall n \geq 4,\ x(n) = 0$ *:*



1. *Calculer sa transformée en $\mathcal{Z}$, puis donner son domaine de convergence.*
2. *Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_1(n) = nx(n)$.*
3. *Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_2(n) = x(n-2)$.*
4. *Donner la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y défini pour tout n par $y_3(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$.*

Exercice 4

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = n\mathcal{U}(n)$
2. $x(n) = 5^n\mathcal{U}(n)$
3. $x(n) = 2\mathcal{U}(n) - n\mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\mathcal{U}(n)$
5. $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathcal{U}(n)$
6. $x(n) = \cos\left(100\pi n + \frac{\pi}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
7. $x(n) = n^2\mathcal{U}(n)$

Exercice 5

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = (2n+1)\mathcal{U}(n)$
2. $y(n) = x(n-3)$
3. $z(n) = x(n+2)\mathcal{U}(n)$
4. $w(n) = 2^n x(n)$

Exercice 6

Déterminer, en justifiant, les transformées en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets causaux suivants.

1. $x(n) = n\mathcal{U}(n-2)$
2. $x(n) = (n-1)^2\mathcal{U}(n-1)$
3. $x(n) = 2^n\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\mathcal{U}(n)$
4. $x(n) = 2^{-n}\mathcal{U}(n-3)$
5. $x(n) = e^{-n}\mathcal{U}(n-1) + 2(n+1)\mathcal{U}(n)$
6. $x(n) = \mathcal{U}(n)\mathcal{U}(1-n)$
7. $x(n) = n^2\mathcal{U}(n-1)$
8. $x(n) = n(-1)^n\mathcal{U}(n)$
9. $x(n) = n^2 2^n\mathcal{U}(n)$

Exercice 7

Déterminer quel signal causal a comme transformée en $\mathcal{Z}$:

1. $X(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 5z^{-4}$
2. $X(z) = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$
3. $X(z) = \dfrac{1}{z^2}$
4. $X(z) = \dfrac{4}{1-z^{-1}}$

5. $X(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-3z^{-1}}$
6. $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(z^{-1}-2)(z^{-1}-3)}$
7. $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(z^{-1}-3)^2}$
8. $X(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$
9. $X(z) = \dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-3z^{-1})}$

Exercice 8

1. *Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:*

$$x(n) + x(n-1) - 6x(n-2) = \delta(n)$$

   (a) *Calculer les 5 premières valeurs de $x(n)$.*
   (b) *On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Calculer $X(z)$*
   (c) *En déduire l'expression de $x(n)$ en fonction de n.*

2. *Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:*

$$x(n) + x(n-1) - 6x(n-2) = U(n)$$

   (a) *Calculer les 5 premières valeurs de $x(n)$.*
   (b) *On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Calculer $X(z)$*
   (c) *En déduire l'expression de $x(n)$ en fonction de n.*

Exercice 9

On considère le système discret $\mathcal{S}$ dont la sortie $(y(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par :

$$y(n) = \frac{9y(n-1) + x(n-1)}{10},$$

où $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est le signal d'entrée, supposé causal.
Par définition le signal $(y(n))$ est aussi considéré comme causal.

1. *Calculer la transmittance complexe* du système.*
2. *Calculer la réponse impulsionnelle puis vérifier la cohérence des valeurs de $y(1)$ et $y(2)$ obtenues, d'une part avec l'expression du filtre et d'autre part avec l'expression de la réponse impulsionnelle.*
3. *Calculer la réponse sa réponse indicielle puis vérifier la cohérence des valeurs de $y(0)$, $y(1)$ et $y(2)$ obtenues, d'une part avec l'expression du filtre et d'autre part avec l'expression de la réponse indicielle.*

$\star$*transmittance complexe* $= \frac{Y(z)}{X(z)}$

Compléments

Exercice 10

Déterminer le domaine de convergence de la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = 2^n$ puis calculer la transformée en fonction de z.

Exercice 11

Exprimer la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal périodique $f(t)$ de période T, échantillonnée selon la période $T_e = \frac{T}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la transformée en $\mathcal{Z}$ du "motif" $f_0(t)$ tel que

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{sur } [0, T] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Exercice 12

La transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale d'une séquence $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la somme de la série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a(n)z^{-n}$, sous réserve que cette série converge.

Déterminer si les séquences suivantes ont une transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale, et la calculer sur leur domaine de convergence si c'est le cas.

1. $a(n) = 1,\ n \in \mathbb{Z}$,
2. $a(n) = 1$ *si* $n \in \mathbb{Z}^-; (1/2)^{-n}$ *sinon.*
3. $a(n) = n;\ n \in [-5, \infty[\cap \mathbb{Z}$.

Exercice 13

1. *Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :*
   - (a) $x_1(n) = (-1)^n \mathcal{U}(n)$
   - (b) $x_2(n) = n(-1)^n \mathcal{U}(n)$
   - (c) $x_3(n) = (-2)^n \mathcal{U}(n-2)$
   - (d) $x_4(n) = n(n-1)\mathcal{U}(n-1)$
2. *Calculer la transformée inverse de*
   - (a) $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{(1-z^{-1})^2}$
   - (b) $X_3(z) = 1 + 2z^{-2} + z^{-3}$

Exercice 14

Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux suivants :

1. $x_1(n) = 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n-2)$
2. $x_2(n) = n(-2)^n \mathcal{U}(n)$

Exercice 15 *Calculer la transformée inverse de*

1. $X_1(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-3)}$
2. $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{1+z^{-1}}$
3. $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$

Chapitre 6

Equations différentielles

Exercice 1
Résoudre les équations suivantes :

1. $2y'(t) + 3y(t) = 0$
2. $5y'(t) + y(t) = 0$ *avec* $y(0) = 2$
3. $y'(t) + 6y(t) = t$
4. $-y'(t) - 4y(t) = t$ *avec* $y(0) = 1$

Exercice 2 *La fonction* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ *est-elle solution de l'équation différentielle* (E_1) *?*

$$(1+x)y'(x) + y(x) = 1 \qquad (E_1)$$

Exercice 3
Résoudre les équations suivantes :

1. $3y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$
2. $y''(t) = 0$
3. $y''(t) - y'(t) = 0$

Exercice 4
Les questions sont toutes indépendantes.

1. *Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont* $y(t) = e^{-\frac{3}{4}t}$ *est solution.*
2. *Déterminer une équation différentielle dont* $y_1(t) = e^{-t}$ *et* $y_2(t) = e^{2t}$ *sont solutions.*
3. *Déterminer une équation différentielle dont* $y_1(t) = \cos(3t)$ *et* $y_2(t) = \sin(3t)$ *sont solutions.*
4. *Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont* $y(t) = te^{-3t}$ *est solution.*

Exercice 5

1. *Résoudre l'équation suivante*
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$
2. *L'équation suivante admet-elle une unique solution ?*
$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Exercice 6

Soit τ un nombre réel et soit (E) l'équation différentielle : $(\tau-1)y''(t)-\tau y'(t)+y(t)=0$. Discuter selon les valeurs de τ la forme des solutions de (E).

Exercice 7

Pour chacune des équations différentielles suivantes :

- *Résoudre l'équation homogène associée,*
- *déterminer une solution particulière,*
- *déterminer l'ensemble des solutions.*

1. $2y''(t)+3y'(t)-4y(t)=2t^2+1$
2. $2y''(t)+3y'(t)-4y(t)=\sin(2t)$
3. $y''(t)+y(t)=\mathrm{e}^{3t}$

Exercice 8

Soit l'équation différentielle (E_2) $\quad y''(t)-y'(t)-6y(t)=e^{-2t}$.

1. *Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-2t}$ est solution de l'équation homogéne associée à (E_2).*
2. *Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme $y(t)=P(t)\mathrm{e}^{-2t}$ avec P de degré 1.*
3. *Résoudre (E_2).*
4. *Existe-t-il une solution de (E_2) qui ait pour limite 0 en $+\infty$?*

Exercice 9

L'étude du mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(t)=0 & \text{si } t<0 \\ f''(t)+2f'(t)+2f(t)=e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t>0 \\ f(0)=1 \text{ et } f'(0)=0. \end{cases} \tag{6.1}$$

1. **Détermination de $F(p)$, la transformée de Laplace de f :**
   (a) *Calculer en fonction de $F(p)$: $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$, $\mathcal{L}_{f''(t)}(p)$ puis $\mathcal{L}_{f''(t)+2f'(t)+2f(t)}(p)$*
   (b) *Calculer la transformée de Laplace de $\mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t)$.*
   (c) *En déduire dans (10.1) l'expression de $F(p)$ en fonction de p.*
2. **Détermination de f :**
   (a) *Vérifier que $F(p)=\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{(p+1)^2+1}$. En déduire l'expression de f.*

Compléments

Exercice 10

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\star\star)\begin{cases} y''+2y'+y=t\mathcal{U}(t) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

On cherche une solution causale à l'équation $(\star\star)$

1. *Exprimer $\mathcal{L}_{y''}(p)$ et $\mathcal{L}_{y'}(p)$ en fonction $\mathcal{L}_y(p)$, $y(0)$ et $y'(0)$*
2. *Montrer que*

$$\frac{1}{p^2(p^2+2p+1)}=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{2}{p}$$

3. *Déterminer la transformée de Laplace inverse de* $\dfrac{1}{p^2(p^2+2p+1)}$.
4. *En déduire la valeur de* $f*g(t)$ *avec* $f(t)=t\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t)=te^{-t}\mathcal{U}(t)$. *Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de l'exercice 2 ?*
5. *Résoudre* ($\star\star$) *en utilisant la transformée de Laplace.*

Exercice 11

1. *On considère l'équation différentielle linéaire :*
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=0. \tag{H}$$
   (a) *Donner la forme générale des solutions de* (H).
   (b) *Donner la solution de* (H) *qui vérifie* $y(0)=1$ *et* $y'(0)=1$.
   (c) *Donner la solution de* (H) *qui vérifie* $y(0)=1$ *et* $y(1)=1$.
2. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=2t^2. \tag{E_1}$$
   (a) *Déterminer une solution particulière de* (E_1).
   (b) *Déterminer la forme générale des solutions de* (E_1).
   (c) *Déterminer la solution de* (E_1) *qui vérifie* $y(0)=1$ *et* $y'(0)=1$.
3. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*
$$y''(t)-y'(t)-2y(t)=2e^{2t}. \tag{E_2}$$
   (a) *Déterminer une solution particulière de* (E_2).

Exercice 12

On considère les équations différentielles suivantes :
$$(E)\quad y''+2y'-3y=e^{-3t}$$
$$(H)\quad y''+2y'-3y=0$$

1. *Montrer que les fonctions* $f(t)=e^t$ *et* $g(t)=e^{-3t}$ *sont solutions de* (H).
2. *Donner toutes les solutions de* (H).
3. *La fonction* g *est-elle solution de* (E) *?*
4. *Chercher une solution de* (E) *de la forme* $y_p(t)=kte^{-3t}$.
5. *Donner toutes les solutions de* (E).
6. *Donner la solution de* (E) *qui vérifie :* $y(0)=1$ *et* $y'(0)=1$

Exercice 13

1. *Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace*
$$y''+5y'+6y=0$$
pour $x\geq 0$ *avec les conditions initiales* $y(0)=3$ *et* $y'(0)=-7$.
2. *Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace*
$$y''+2y'+y=e^{-t}\mathcal{U}(t)$$
pour $x\geq 0$ *avec les conditions initiales* $y(0)=A$ *et* $y'(0)=B$.

Exercice 14 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*
$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(x^2+1)e^x$$
On pourra pour cela utiliser le théorème suivant :

Théorème 1 (Recherche d'une solution particulière, forme exponentielle-polynôme)
On considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = g \tag{E}$$

où $g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$.

Pour chaque $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *il existe une solution particulière* y_k *de* $y'' + ay' + by = e^{m_k x} P_k(x)$ *de la forme* $y_k = e^{m_k x} Q_k(x)$ *avec* Q_k *un polynôme de degré :*

— $\deg(P_k)$ *si* m_k *n'est pas solution de l'équation caractéristique*
— $\deg(P_k) + 1$ *si* m_k *est solution simple de l'équation caractéristique*
— $\deg(P_k) + 2$ *si* m_k *est solution double de l'équation caractéristique*

Une solution particulière de (E) *est alors* $\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Chapitre 7

Transformée de Fourier

Exercice 1

1. Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si } -1 < t < 0 \\ -1 & \textit{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Tracer son graphe et calculer sa transformée de Fourier.

2. Soit la fonction Λ "triangle" définie par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \textit{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \textit{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

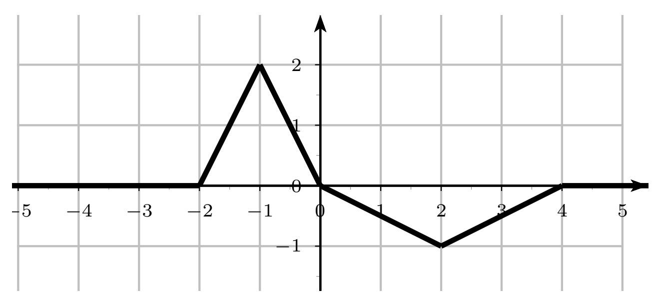
(a) Tracer le graphe de Λ. Calculer (directement) sa transformée de Fourier.

(b) Retrouver ce résultat en utilisant la fonction dérivée.

Exercice 2

Calculer les transformées de Fourier, si elles existent, des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = \dfrac{1}{2} e^{-|t|}$,
2. $f_2(t) = \mathcal{U}(t)$,
3. $f_3(t) = (\mathcal{U}(t + \frac{\pi}{2}) - \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})) \cos t$,
4. *la fonction f dont le graphe est*



Exercice 3

On considère la fonction paire f définie par : $\begin{cases} f(t) = 1 \textit{ si } t \in [0, 1[\\ f(t) = 2 - t \textit{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ f(t) = 0 \textit{ si } t \geq 2 \end{cases}$

1. Représenter la fonction f

2. Calculer sa transformée de Fourier :

(a) directement (par la définition),

(b) en écrivant f comme somme de triangle,

(c) en utilisant f',

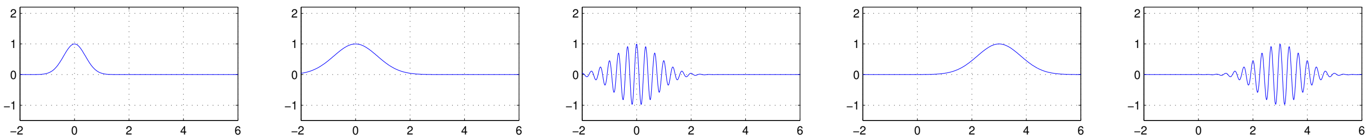
Exercice 4

Représenter les signaux suivants et donner leurs transformées de Fourier :

1. $f(t) = \Pi(t-3)$
2. $g(t) = \Lambda\left(\dfrac{t}{3}\right)$
3. $h(t) = \Pi\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$
4. $k(t) = \Lambda\left(\dfrac{3t-1}{4}\right)$
5. $l(t) = \dfrac{\Pi(1-t)}{2}$

Exercice 5

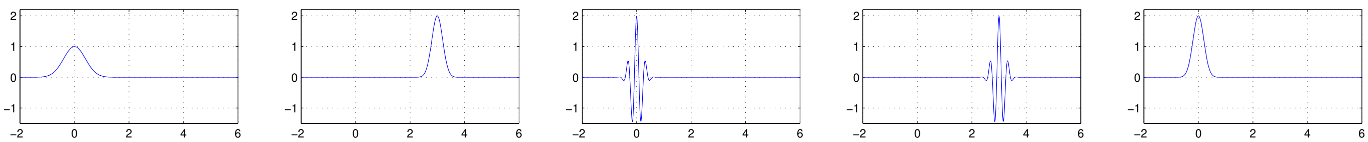
La figure suivante représente cinq signaux temporels réels à temps continu s_0 à s_4. Les signaux s_1 à s_4 ont été obtenus par des transformations simples du signal s_0 : modulation, décalage, dilatation.



s_0 $\quad$ s_1 $\quad$ s_2 $\quad$ s_3 $\quad$ s_4

Identifier ces transformations, autrement dit expliquer comment chacun des signaux s_1 à s_4 a été obtenu à partir de s_0.

La figure suivante représente la partie réelle de leur transformée de Fourier (S_a à S_e), dans le désordre...*On sait cependant que S_a est la transformée de s_0.*



S_a $\quad$ S_b $\quad$ S_c $\quad$ S_d $\quad$ S_e

Reformer, en justifiant votre réponse, les couples (s_i, S_j), autrement dit retrouvez la transformée de Fourier des signaux s_1, s_2, s_3, s_4 dans l'ensemble S_b, S_c, S_d, S_e.

Exercice 6 Transformée de Fourier inverse

1. *Calculer la transformée de Fourier inverse de :*

$$F_1(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } s \in [-2, 2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. *Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$ en utilisant la transformée de Fourier inverse.*

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

1. *Déterminer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$.*
2. *Montrer en appliquant l'identité de Parseval que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.*

Exercice 8

A l'aide de l'identité de Parseval, calculez les intégrales :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$,
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 9

Déterminer la fonction $f \in L^2$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt = e^{-x^2}$.

(Indication : On pourra utiliser le fait que si $f(x) = e^{-x^2/2}$, alors $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2\omega^2}$.)

Exercice 10

Utiliser la transformée de Fourier pour calculer :

1. $\delta \star \delta$
2. $\delta_a \star \delta_b$
3. $\delta \star f$
4. $\delta_a \star f$

Compléments

Exercice 11

Soit le signal 2π *périodique* s *défini sur* $[-1;1]$ *par :* $s(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [-0,5;0,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soit σ *le signal défini sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\sigma(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [-0,5;0,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. *Déterminer les coefficients complexes de la série de Fourier de* s.
2. *Calculer numériquement les valeurs des* c_n *jusque* $n = 8$ *et tracer le spectre des* c_n.
3. *Déterminer* $S(v)$ *la transformée de Fourier de* σ.
4. *Représenter* $S(v)$ *pour* $v \in [0;4]$ *et montrer qu'en échantillonnant* $S(v)$ *à une fréquence que l'on précisera on retrouve le spectre des* c_n.

Exercice 12

Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Vérifier que la transformée de Fourier de cette fonction existe.*

Montrer que cette transformée est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 4\pi^2 xy = 0.$$

En déduire que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2\omega^2}$.

Exercice 13

On se donne deux fonctions $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ *et* $f_b(x) = e^{-b|x|^2}$ *(ces fonctions sont appelées des gaussiennes), où* a *et* b *sont des réels strictement positifs.*

1. *Déterminer les transformées de Fourier de* f_a *et de* f_b.
2. *Déterminer la transformée de Fourier de* $f_a * f_b$.

Exercice 14

Soit $s(t)$ *le signal :* $s(t) = \cos(5\pi t)$.

1. *Quelle est la transformée de Fourier de* s.
2. *On multiplie* s *par la fonction porte* Π.
   (a) *Représenter le signal* $g(t) = s(t)\Pi(t)$.
   (b) *Calculer la transformée de Fourier de* g.

Exercice 15

Soient f *et* g *les signaux :*

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1} \text{ et } g(t) = \frac{1}{t^2+4}$$

Le but de l'exercice est de calculer le produit de convolution $f \star g$.

1. *Déterminer la transformée de Fourier de* f *et de* g.
2. *Calculer* $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
3. *En déduire* $f * g$.

Exercice 16

On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \pi t + 1 & \text{pour } -\frac{1}{\pi} \leq t \leq 0 \\ -\pi t + 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-5, 5]$.*
2. *Déterminer la transformée de Fourier de f*
3. *Déterminer la transformée de Fourier de* $g(t) = \begin{cases} \pi & \text{pour } -\frac{1}{\pi} \leq t \leq 0 \\ -\pi & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. (a) *Que vaut* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ *?*

   (b) *Déterminer la valeur de* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^4 dt$.

Chapitre 8

Développements limités

Exercice 1

Déterminer les limites quand $x \to a$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$ *avec* $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ *avec* $a = 1$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ *avec* $a = -\infty$
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ *avec* $a = +\infty$
5. $f(x) = (x^3 - x)\ln(x^4 - 1)$ *avec* $a = 1$
6. $f(x) = \dfrac{e^{x^3 - x^2}}{e^{x^3 + x}}$ *avec* $a = +\infty$
7. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *avec* $a = 0$
8. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ *avec* $a = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x + 2}$
2. $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$
3. $e^{x^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$
4. $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} x^3 + x$
5. $\sin(x) - 1 \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} x - \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3

Calculer les développements limités suivants, au voisinage de 0 *:*

1. $f(x) = x^4 - x^2 + x$ *à l'ordre* 3
2. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ *à l'ordre* 4
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$ *à l'ordre* 3
4. $f(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$ *à l'ordre* 3
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x - 1}$ *à l'ordre* 3

Exercice 4

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln(x)$ *à l'ordre* 3 *au voisinage de* $x_0 = e$,
2. $\exp(x)$ *à l'ordre* 4 *au voisinage de* $x_0 = 1$,
3. $e^x - \sqrt[3]{1 + x}$ *à l'ordre* 2 *au voisinage de* $x_0 = 2$
4. $\tan(x)$ *à l'ordre 2 au voisinage de* $\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 5

Calculer les développements limités au voisinage de 0 *suivants :*

1. $f(x) = \ln(1 + x - x^2)$ *à l'ordre* 2
2. $f(x) = e^{\sin(x)}$ *à l'ordre 3*
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ *à l'ordre 4*
4. $f(x) = \ln(\cos x)$ *à l'ordre* 4
5. $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$ *à l'ordre* 2
6. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$ *à l'ordre* 2
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ *à l'ordre* 4

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$,

Exercice 7

Calculer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$,

Exercice 8

On note $f(x) = e^x \ln(1 + x)$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de* $f(x)$.
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de* $f'(x)$.
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de* $\dfrac{e^x}{1+x}$.
4. (a) *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de* f *au point 0.*

   (b) *Quelle est la position relative de la courbe de* f *par rapport à sa tangente au point 0.*

Exercice 9

1. *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $\dfrac{1}{1+x^2}$.
2. *En déduire le développement limité en* 0 *à l'ordre* 5 *de* $\arctan(x)$.
3. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3}.\ \ln(1 + \arctan(x))$.

Exercice 10

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de* $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
2. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
3. *Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de* $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

Compléments

Exercice 11

1. *Montrer que le DL à l'ordre 4 en 0 de* $\dfrac{1}{\cos(x)}$ *est* $1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$
2. *Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de* $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$
3. (a) *Déterminer l'équation de la tangente en 0 de* $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

   (b) *La courbe de* $f(x)=\dfrac{e^x}{\cos(x)}$ *se situe-t-elle au dessus ou au dessous de sa tangente en 0 ?*

Exercice 12

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}$
2. *Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de* $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$

Exercice 13

Les questions suivantes sont indépendantes

1. *Déterminer le* $DL_2(0)$ *de la fonction* $f(x)=\dfrac{1}{1+x+2x^2}$.
2. *Montrer que les fonctions* $f(x)=\ln(1+3x)\sin(2x)$ *et* $g(x)=6x$ *sont équivalentes en* 0.
3. *Soit* f *une fonciton dont le développement limité à l'ordre 4 est* $1+3x-5x^3+7x^4+x^4\epsilon(x)$.
   Quelle est la position relative entre la courbe de f *est sa tangente en* 0 *?*

Exercice 14

Les assertions suivantes sont fausses. Pour chacune d'entre elles, trouvez un contre-exemple pour le prouver.

1. *Si* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ *alors* $f_1+f_2 \underset{a}{\sim} g_1+g_2$.
2. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $e^f \underset{a}{\sim} e^g$.
3. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)=1$ *alors* $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.
4. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* f *et* g *sont dérivables alors* $f' \underset{a}{\sim} g'$.

Exercice 15

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))}$.

Dans les développpement limités (d.l.) qui suivent, ε *désigne une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.*

Répondre par vrai ou faux :

1. *Le domaine de définition de* f *est* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. *Au voisinage de 0,* $\sin(x)$ *a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) :* $\sin(x)=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^6\varepsilon(x)$.
3. *Au voisinage de 0,* $\sin^2(x)$ *a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) :* $\sin^2(x)=x^2-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{2x^6}{45}+x^6\varepsilon(x)$.
4. *Au voisinage de 0,* $\ln(1+x)$ *a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) :* $\ln(1+x)=x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}+x^6\varepsilon(x)$.

5. *Au voisinage de 0,* $\ln(\cos(x))$ *a pour d.l. à l'ordre 6 (d.l.6) :* $\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + x^6\varepsilon(x)$.

6. *Au voisinage de 0,* $\dfrac{x^2}{\ln(\cos(x))}$ *a pour d.l.4 :* $\dfrac{x^2}{\ln(\cos(x))} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{60} + x^4\varepsilon(x)$.

7. *Au voisinage de 0,* $\dfrac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))}$ *a pour d.l.4 :* $\dfrac{\sin^2(x)}{\ln(\cos(x))} = -2 + x^2 - \dfrac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$.

8. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = -2$

9. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f'(x) = 1$

10. *Au voisinage de* 0^+*, la courbe représentative de* f *reste au dessus de la parabole d'équation* $y = -2 + x^2$.

Exercice 16 $\star\star$

Etudier les branches infinies de la courbe représentée par :

$$y = x^3 \arctan\left(\frac{3x-1}{3(x^2+x+1)}\right).$$

On déterminera une parabole (P) *asymptote à la courbe et la position de la courbe par rapport à cette parabole.*

Chapitre 9

DS de l'année 2024-2025

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 04 octobre 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Le DS contient 2 parties. Merci de faire des copies séparées pour chaque partie.

Partie 1

Exercice 1

1. *Déterminer la limite des suites suivantes.*

   (a) $U_{n+1} = U_n - 5$ *avec* $U_0 = 2$

   (b) $U_n = \frac{5}{3^{n+1}}$

   (c) $U_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

   (d) $U_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-n}$

2. *Calculer les sommes suivantes*

   (a) $\sum_{k=1}^{5} \frac{3}{2^{2n}}$

   (b) $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k^2+k}$.

3. *Donner la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes en justifiant votre réponse.*

   (a) $\sum \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

   (b) $\sum \frac{\sin(n)}{3^n}$

   (c) $\sum \frac{1}{n} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 2 *Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal suivant :*

$$s(t) = -1 + \cos(t) + \sin(t) + \sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) + 2\cos(3t) - 2\sqrt{3}\sin(3t) - \sin(4t) - 4\cos(5t)$$

Partie 2

Exercice 3 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^2-3t+2}dt$
2. $I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3(t)dt$
3. $I_4 = \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2+1}dt$
4. $I_5 = \int_{-1}^{0} (t+2)\cos(x)dt$
5. $I_6 = \int_0^4 x\sqrt{1+x^2}dx$ *en utilisant le changement de variables* $u = 1 + x^2$

Exercice 4

Soit la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & si \ -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & si \ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

1. *Tracer la fonction* f *entre* -4 *et* 4.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de* f.
3. *Donner la série de Fourier de* f.
4. *Soit la fonction* h *2-périodique et impaire définie par :*

$$h(t) = \begin{cases} t & si \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1-t & si \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

5. *Tracer la fonction* h *entre* -4 *et* 4.
6. *Ecrire* h *en fonction de* f.
7. *En déduire la série de Fourier de* h.

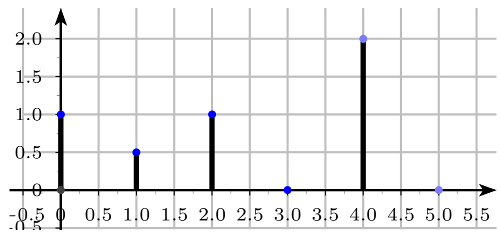
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 29 novembre 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Le DS contient 2 parties. Merci de faire des copies séparées pour chaque partie.

Partie 1

Exercice 1
Soit f un signal 2π périodique. On donne le spectre d'amplitude de f :



Déterminer (en justifiant) la valeur de l'énergie moyenne $E(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2 *Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.*

1. *On note* $f(t) = t\mathcal{U}(t)$
   (a) *Calculer* $f * g_1(t)$ *avec* $g_1(t) = \mathcal{U}(t)$
   (b) *En déduire* $f * g_2(t)$ *avec* $g_2(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-2)$
2. *On note* $f(t) = \Lambda\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$ *et* $g(t) = \delta(t) + 2\delta(t+2) + \dfrac{1}{2}\delta(t-1)$
   (a) *Représenter les fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *sur l'intervalle* $[-4, 4]$.
   (b) *Représenter graphiquement* $f * g(t)$
3. (a) *Calculer la dérivée de* $f * g(t)$ *avec* $f(t) = t\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$.
   (b) *En supposant que* $f * g(0) = 0$, *en déduire la valeur de* $f * g(t)$.

Partie 2

Exercice 3 *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. (a) *Enoncer la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal numérique causal $x(n)$.*
   (b) *Soit $x(n)$ un signal numérique causal et $y(n)$ défini par $\forall n,\ \ y(n) = a^n x(n)$. En partant de la définition, démontrer la formule $Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$, où $Y(z)$ est la transformée en $\mathcal{Z}$ de y et $X(z)$ celle de x.*
   (c) *En déduire la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal numérique causal défini par $\forall n$, $x(n) = e^{-2n}\mathcal{U}(n)$.*
2. *Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux numériques causaux suivants :*

   (a) $x_1(n) = \delta(n) + \delta(n-2) - 2\delta(n-4)$
   (b) $x_2(n) = n(-1)^n\mathcal{U}(n)$
   (c) $x_3(n) = 2^n\mathcal{U}(n-2)$
   (d) $x_4(n) = n\mathcal{U}(n-3)$

3. *Calculer la transformée inverse de*

   (a) $X_1(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-3)}$
   (b) $X_2(z) = \dfrac{z^{-3}}{1+z^{-1}}$
   (c) $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$

Exercice 4

On considère le signal discret **causal** x *défini par :*

$$x(n-2) - 3x(n-1) + 2x(n) = \delta(n),$$

où δ est l'impulsion numérique.

1. *Calculer $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.*
2. *On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Montrez que :*

$$X(z) = -\frac{1}{z^{-1}-1} + \frac{1}{z^{-1}-2}.$$

3. *Déduire de ce qui précède l'expression du signal x en fonction de n.*

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 10 janvier 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Le DS contient 2 parties. Merci de faire des copies séparées pour chaque partie.

Partie 1

Exercice 1

Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \textit{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Calculer la transformée de Fourier de f.*
2. *Calculer les transformées de Fourier de :*
   - *(a)* $f(2t)$,
   - *(b)* $f(t-2)$,
   - *(c)* $f(2t+4)$,
   - *(d)* $f(-t)$.
3. *Déduire de ce qui précède la transformée de Fourier de la fonction "triangle" :*

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \textit{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \textit{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2

On rappelle dans cet exercice que la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-|t|}$ est $\hat{f}(s) = \frac{2}{1+4\pi^2 s^2}$.

1. *Déduire de ce qui précède la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+4\pi^2 t^2}$.*
2. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.*
3. *En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.*
4. *Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$.*

Partie 2

Exercice 3

1. *On considère l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0. \tag{H}$$

   (a) *Donner la forme générale des solutions de* (H).

   (b) *Donner la solution de* (H) *qui vérifie* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$.

   (c) *Donner la solution de* (H) *qui vérifie* $y(0) = 1$ *et* $y(1) = 1$.

2. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2t^2. \tag{E_1}$$

   (a) *Déterminer une solution particulière de* (E_1).

   (b) *Déterminer la forme générale des solutions de* (E_1).

   (c) *Déterminer la solution de* (E_1) *qui vérifie* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$.

3. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}. \tag{E_2}$$

   (a) *Déterminer une solution particulière de* (E_2).

Exercice 4

1. *Calculer les limites suivantes :*

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x-x^2}}{e^{x+x^3}}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+x^3}{x-2x^3}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$,

2. *Calculer les développements limités à l'ordre 4 en* 0 *de :*

   (a) $f(x) = 1 - 2x + 3x^4$,

   (b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$,

   (c) $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$

   (d) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Chapitre 10

DS de l'année 2023-2024

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 06 octobre 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. *Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison quand elle existe ainsi que le premier terme si la suite est explicite.*

   (a) $U_{n+1} = U_n - 5$

   (b) $U_n = 2 \times 3^n$

   (c) $U_{n+1} = 4U_n$

   (d) $U_n = 2n + 1$

   (e) $U_{n+1} = 3U_n + 5$

   (f) $U_{n+1} = 2n + 4U_n$

2. *Déterminer la limite des suites suivantes.*

   (a) $U_{n+1} = U_n - 5$

   (b) $U_n = \frac{3}{2^{n+1}}$

   (c) $U_{n+1} = 4U_n$ *avec* $U_0 = 2$

   (d) $U_n = \left(\dfrac{2}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^{-n}$

Exercice 2 *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. *Calculer les sommes suivantes :*

   (a) $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{10} 3k + 2$

   (b) $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} 4 \times 2^{k+2}$

2. *Donner la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes en justifiant votre réponse.*

   (a) $\sum \frac{2^n}{3^{2n+1}}$

   (b) $\sum \ln(n)2^n$

   (c) $\sum \frac{1}{n} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 3 *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$. *On note* $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{1-4k^2}$.

1. *Prouver à l'aide d'un équivalent que la série* $\sum \frac{2}{1-4k^2}$ *est convergente.*

   On souhaite maintenant déterminer la limite de S_N.

2. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{2}{1-4k^2} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}$$

3. *Exprimer S_N en fonction de N.*
4. *En déduire $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N$.*

Exercice 4 *Calculer les intégrales suivantes :*

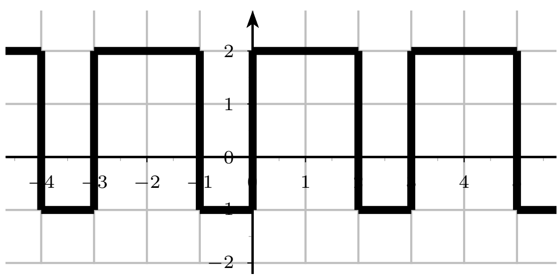
1. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^2-6t+8} dt$
2. $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{18}}^0 \cos^2(6t)\sin(6t)dt$
3. $I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(2t)dt$
4. $I_4 = \int_0^1 \frac{2t-5}{(t-3)(t-2)} dt$
5. $I_5 = \int_{-1}^0 (t+1)\cos(nt)dt$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
6. $I_6 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$ *en utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$*

Exercice 5 *Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal suivant :*

$$s(t) = 1 + \cos(t) + \sin(t) + \sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) + 2\cos(3t) - 2\sqrt{3}\sin(3t) - \sin(4t) - 4\cos(5t)$$

Exercice 6 *Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer :*

1. *la valeur moyenne*
2. *l'énergie moyenne*

(a) 

(b) *f est paire et de période 2 avec $f(t) = t + 2$ si $t \in [0, 1]$*

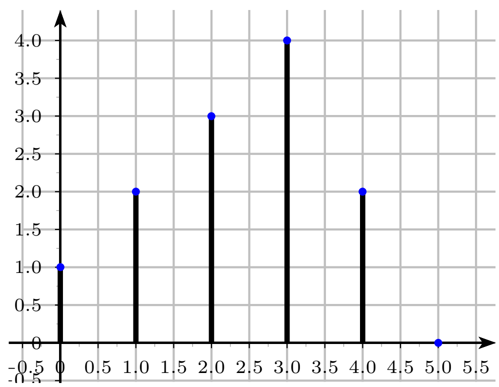
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 24 novembre 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

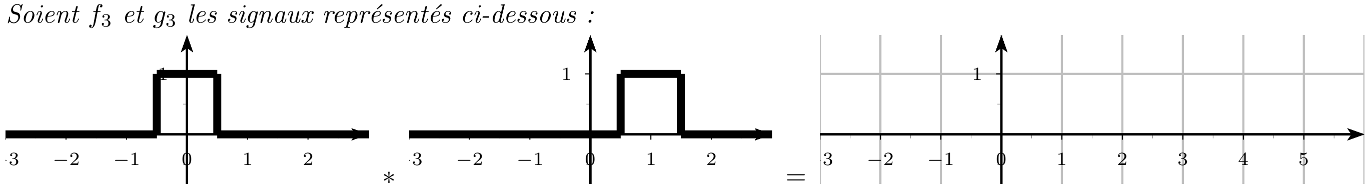
1. *Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f_1 suivante :*
   $f_1(t) = 1 + \cos(t) + \sin(t) - 3\sin(3t) + 5\cos(5t)$.
2. *On considère la fonction f_2 périodique, de période 4, paire et telle que :* $f_2(t) = \begin{cases} 2 & si\ t \in [0,1] \\ -2 & si\ t \in [1,2] \end{cases}$
   (a) *Tracer la fonction f_2*
   (b) *Calculer les coefficients de Fourier de f_2*
   (c) *En déduire le développement en série de Fourier de f_2*
3. *Soit f_3 un signal 2π-périodique, de valeur moyenne 1 et dont le spectre d'amplitude est :*



Déterminer la valeur de l'energie moyenne de f_3

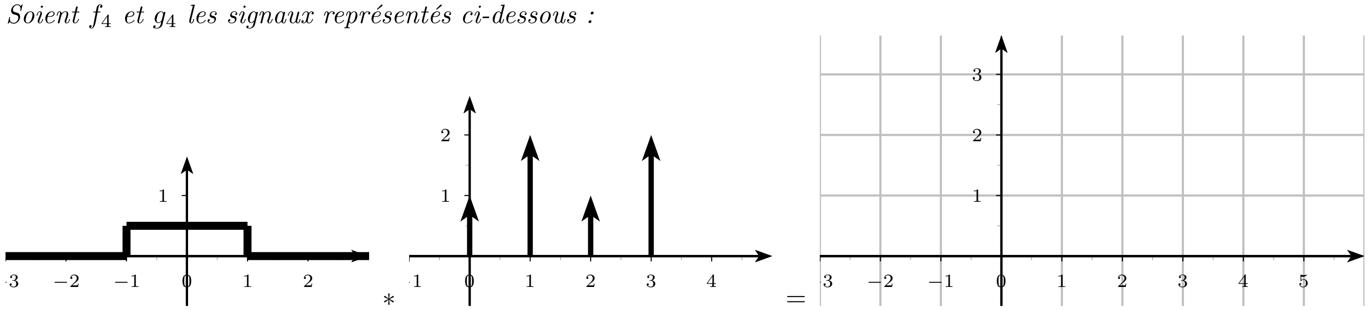
Exercice 2

1. *Calculer le produit de convolution entre $f_1(t) = 2\mathcal{U}(t)$ et $g_1(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$*
2. *Calculer le produit de convolution entre $f_2(t) = \Pi(t-1)$ et $g_2(t) = (t+1)\mathcal{U}(t)$*
3. *Soient f_3 et g_3 les signaux représentés ci-dessous :*



Tracer, sur le graphique ci-dessus,la représentation graphique de $f_3 * g_3$

4. *Soient f_4 et g_4 les signaux représentés ci-dessous :*

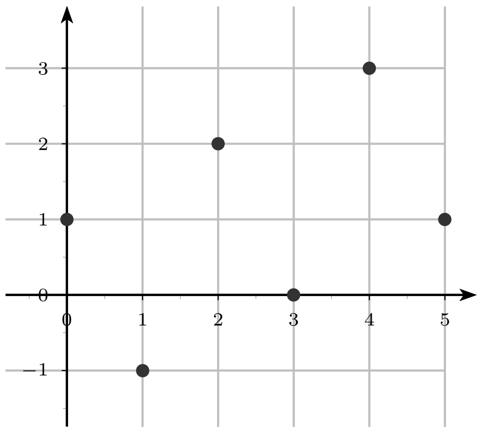


Tracer, sur le graphique ci-dessus,la représentation graphique de $f_4 * g_4$

5. *Soit la fonction* $F(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$ *dans le domaine de Laplace. En utilisant un produit de convolution, calculer la transformée inverse de* F.

Exercice 3

1. *Déterminer la transformée en* $\mathcal{Z}$ *de chaque signal :*
   (a) $(x_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est le signal causal tel que* $\forall n \geq 6,\ x_1(n) = 0$ *et dont le graphe est :*



   (b) $x_2(n) = (2n+1)\mathcal{U}(n)$
   (c) $x_3(n) = \dfrac{2^{n+2}}{3^{2n+3}}\mathcal{U}(n)$
   (d) $x_4(n) = \sin\left(\pi n + \dfrac{\pi}{6}\right)\mathcal{U}(n)$
2. *En revenant à la définition, montrer que la transformée en* $\mathcal{Z}$ *du signal causal discret*
   $x(n) = \begin{cases} 2^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ *est :*

$$X(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}} + \frac{1}{1-z-1}$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 12 janvier 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

On considère le signal discret causal x défini par :

$$x(n-2)-3x(n-1)+2x(n)=\delta(n),$$

1. *Calculer $x(0)$, $x(1)$ et $x(2)$.*
2. *On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de x. Montrez que :*

$$X(z)=-\frac{1}{z^{-1}-1}+\frac{1}{z^{-1}-2}.$$

3. *Déduire de ce qui précède l'expression du signal x en fonction de n.*

Exercice 2

On considère la fonction

$$f(t)=\begin{cases} 2t+1 & \textit{pour } -\frac{1}{2}\leq t\leq 0 \\ -2t+1 & \textit{pour } 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. *Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$.*
2. *Déterminer la transformée de Fourier de f*
3. *Déterminer la transformée de Fourier de* $g(t)=\begin{cases} 2 & \textit{pour } -\frac{1}{2}\leq t\leq 0 \\ -2 & \textit{pour } 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$
4. (a) *Que vaut* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt$ *?*

   (b) *Déterminer la valeur de* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^4dt$.

Exercice 3

1. *On considère l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t)-4y'(t)+3y(t)=0. \tag{H}$$

   (a) *Donner la forme générale des solutions de (H).*

   (b) *Donner la solution de (H) qui vérifie $y(0)=0$ et $y(1)=1$.*

2. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t)-4y'(t)+3y(t)=t^2. \tag{E_1}$$

   (a) *Déterminer une solution particulière de (E_1).*

   (b) *Déterminer la forme générale des solutions de (E_1).*

   (c) *Déterminer la solution de (E_1) qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=1$.*

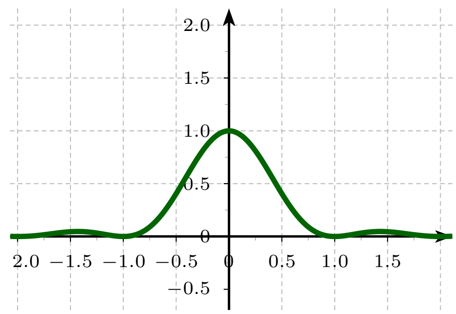
3. *On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :*

$$y''(t)-4y'(t)+3y(t)=2e^t. \tag{E_2}$$

   (a) *Déterminer une solution particulière de (E_2).*

Exercice 4

Dans le graphique ci-dessous est représentée la transformée de Fourier d'une certaine fonction f.



Représenter sur l'intervalle $[-4; 4]$, en justifiant votre graphique, les transformées de Fourier de :

1. $f(2x)$
2. $f(x+1)$
3. $f(3x-2)$

Exercice 5

Dans cet exercice, on souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

où y est une fonction causale.

1. *Calculer en fonction de $Y(p)$: $\mathcal{L}_{y'(t)}(p)$, $\mathcal{L}_{y''(t)}(p)$ puis $\mathcal{L}_{y''(t)-2y'(t)+y(t)}(p)$*
2. *Calculer la transformée de Laplace de $e^{-t}\mathcal{U}(t)$.*
3. *En déduire dans (10.1) l'expression de $Y(p)$ en fonction de p.*
4. *Vérifier que $Y(p) = \dfrac{1}{4(p+1)} + \dfrac{3}{4(p-1)} - \dfrac{1}{2(p-1)^2}$.*
5. *En déduire l'expression de f.*

Chapitre 11

DS de l'année 2022-2023

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 07 octobre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Chapitre 1 : Suites et séries numériques

1. *Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison quand elle existe.*

   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$

   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$

   (c) $U_{n+1} = 2U_n + 5$

   (d) $U_n = 4n + 3$

   (e) $U_{n+1} = 3U_n$

   (f) $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$

2. *Déterminer la limite des suites suivantes.*

   (a) $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^{2n}}$

   (b) $U_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+4}$

   (c) $U_n = 4n + 3$

   (d) $U_{n+1} = 3U_n$ *avec* $U_0 = 2$

Exercice 2 Chapitre 1 : Suites et séries numériques

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. *Calculer la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} 2k + 1$.
2. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^n}$.

   (a) *Exprimer* S_N *en fonction de* N.

   (b) *En déduire* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.
3. *Déterminer la nature des séries suivantes :*

   (a) $\sum \frac{4}{5^{2n}}$

   (b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (c) $\sum \frac{4^{n-3}+2}{2^n+4}$

   (d) $\sum n^2 \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Exercice 3 Chapitre 2 : Révisions sur le calcul intégral

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^2 3t^4 + 5t^3 + t + 2dt$
2. $I_2 = \int_0^\pi \cos(3t)\sin^2(3t)dt$
3. $I_3 = \int_{-1}^0 \frac{2}{(t-3)(t-1)}dt$
4. $I_4 = \int_{-2}^2 \sin(3t) + 3tdt$
5. $I_5 = \int_0^1 (2t+3)e^{4t}dt$
6. $I_6 = \int_{-1}^1 \frac{2}{t^2+4}dt$

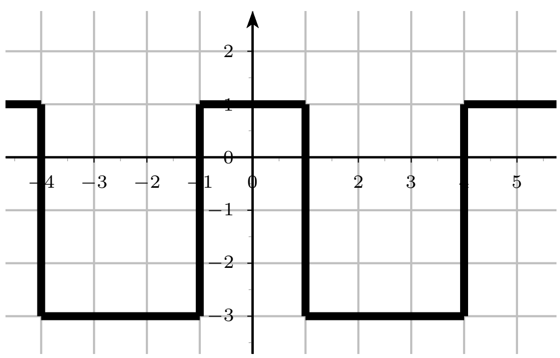
Exercice 4 Chapitre 3 : Séries de Fourier

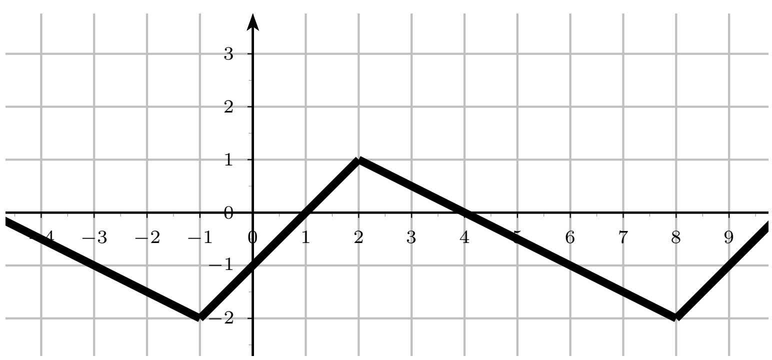
1. *Mettre sous la forme* $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ *avec* $A > 0$ *les signaux suivants :*
   (a) $s_1(t) = -\sin(10t)$
   (b) $s_2(t) = -2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t)$
   (c) $s_3(t) = 2\cos(-40t)$
2. *Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal suivant :*

$$s(t) = 3 - \sin(10t) - 2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t) + 3\sin(30t) + 2\cos(40t).$$

Exercice 5 Chapitre 3 : Séries de Fourier

Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer la valeur moyenne.

1. 

2. 

3. $f(t) = \cos(\pi t)$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 25 novembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Chapitre 3 : Séries de Fourier

1. *On considère le signal s suivant :*

$$s(t) = 3 - \sin(10t) - 2\cos(20t) + 2\sqrt{3}\sin(20t) + 3\sin(30t) + 2\cos(40t).$$

   (a) *Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal s.*

   (b) *Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction s.*

2. *On considère la fonction f dont les coefficients de Fourier sont donnés par :* $\begin{cases} a_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ et } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \end{cases}$

   (a) *Déterminer la série de Fourier de f*

   (b) *Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier.*

   (c) *Déterminer l'energie moyenne de f.*

3. *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :* $\begin{cases} g \text{ est 1-périodique,} \\ g(t) = t,\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{cases}$

Exercice 2 Chapitre 4 : Produit de convolution

1. *Calculer le produit de convolution entre f et g :*

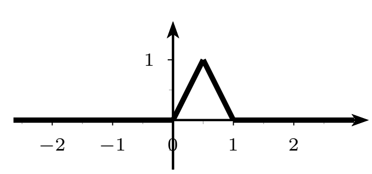
   (a) $f(t) = 4t^2\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = (t-5)\mathcal{U}(t)$

   (b) $f(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$ *et* $g(t) = \Pi(t)$

2. *Soit* $h(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(3t+1)\delta(t-k)$

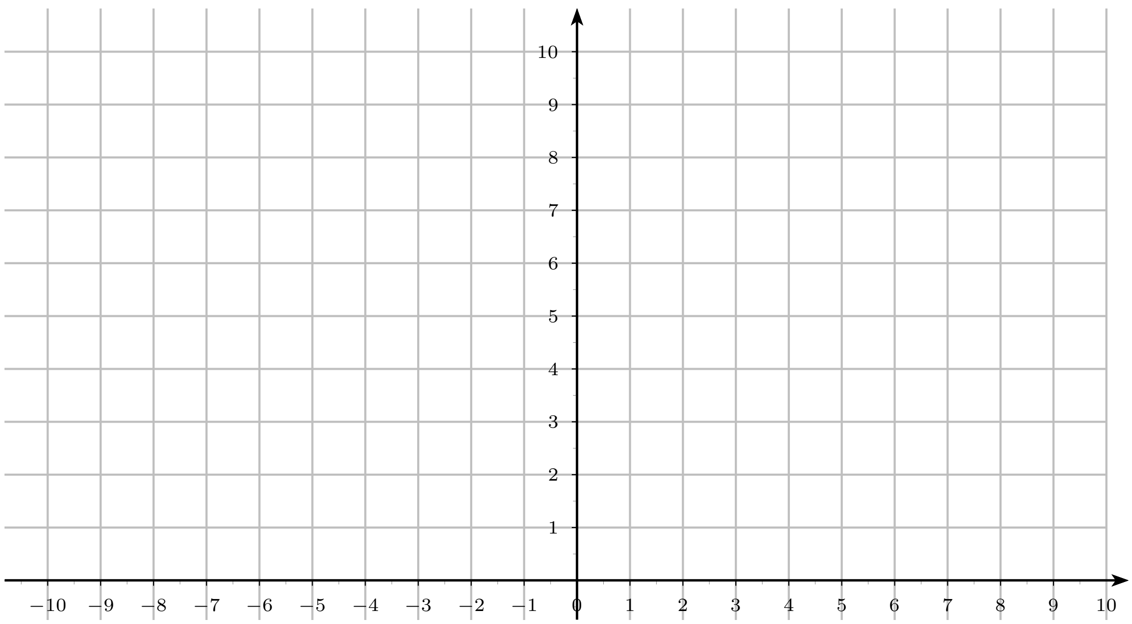
   (a) *Représenter h sur le graphique de la page suivante.*

   (b) *Tracer, sur le même graphique, le produit de convolution de h par k (sans justifier) en sachant que la courbe de k est :*



   (c) *En utilisant le produit de convolution (et en vous aidant du formulaire de la page suivante), calculer la transformée de Laplace inverse de F définie par :*

$$F(p) = \frac{6}{p(p^2+9)}$$



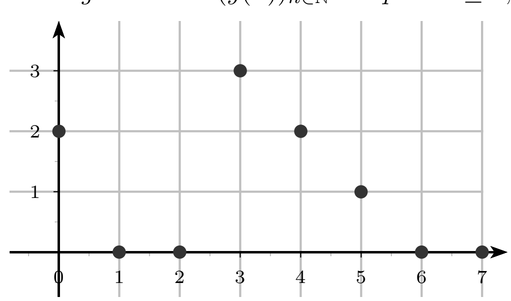
Formulaire

Fonction	*Transformée de Laplace*
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$

Fonction	*Transformée de Laplace*
$te^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Exercice 3 Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$

1. *Donner la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal numérique causal x.*
2. *Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x(n) = \mathcal{U}(n)$.*
3. *Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \geq 6, y(n) = 0$ et dont le graphe est :*



4. *Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de* $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 13 janvier 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Chapitre 7 : Equations différentielles

1. *Résoudre les équations suivantes :*

   (a) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

   (b) $y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = t + 5$

   (c) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4 \end{cases}$

2. *Déterminer une équation différentielle dont* $y_1(t) = e^t\cos(2t)$ *et* $y_2(t) = e^t\sin(2t)$ *sont solutions.*
3. *La fonction* $f(t) = (2t+1)e^{-4t}$ *est-elle solution de l'équation différentielle suivante :*

$$2y''(t) + y(t) - 4y(t) = 32te^{-4t}$$

Exercice 2 Chapitre 6 : Transformée de Fourier

1. *Montrer, en utilisant la définition de la transformée de Fourier, que :*

$$\mathcal{F}_\Pi(s) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} & si \quad s \neq 0 \\ 1 & si \quad s = 0 \end{cases}$$

   oú $\mathcal{F}_\Pi$ *est la transformée de Fourier du signal porte* Π.

2. *Donner la transformée de Fourier des signaux suivants :*

   (a) $f_1(t) = \Lambda(t-2)$

   (b) $f_2(t) = \Pi(3t)$

   (c) $f_3(t) = \Pi\left(\frac{2t+1}{4}\right)$

Exercice 3 Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$

1. *Déterminer, en justifiant, les transformées en* $\mathcal{Z}$ *des signaux discrets causaux suivants :*

   (a) $x_1(n) = (2n+4)\mathcal{U}(n)$

   (b) $x_2(n) = \frac{1}{4^n}\mathcal{U}(n)$

   (c) $x_3(n) = x_1(n-2)$

   (d) $x_4(n) = n^2\mathcal{U}(n)$

   (e) $x_5(n) = 2^n(n-2)\mathcal{U}(n-2)$

2. *Déterminer quel signal causal a comme transformée en* $\mathcal{Z}$ *:*

   (a)
$$X_1(z) = 4 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}$$

   (b)
$$X_2(z) = \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

Exercice 4 Chapitre 5 : Transformée en $\mathcal{Z}$

Soit x le signal causal discret vérifiant pour tout $n \geq 0$:

$$x(n) - 3x(n-1) + 2x(n-2) = \delta(n-1)$$

1. *En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ à la relation précédente, montrer que :*

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

2. *En déduire que :*

$$x(n) = (2^n - 1)\mathcal{U}(n)$$

Exercice 5 Chapitre 6 : Transformée de Fourier

1. *Calculer à l'aide de l'identité de Parseval l'intégrale I_1 :*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} dx$$

2. *En déduire la valeur de l'intégrale I_2 :*

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$