

Durant cette semaine, vous allez aborder l'étude des filtres du second ordre. Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur les filtres passe-bas qui sont les plus simples. Les autres types de filtre seront vus par la suite.

Exercice 1 : Fonctions de transfert d'ordre 2

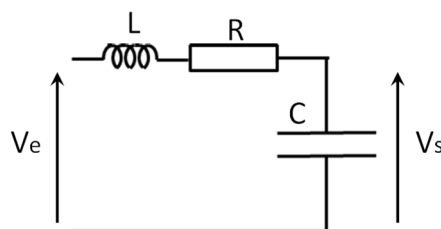
Soit les fonctions de transfert suivantes où $C=160$ nF, $R=1$ k, $L=20$ mH :

$$H_1(j\omega) = \frac{1/jC\omega}{2/jC\omega + jL\omega + R} \quad H_2(j\omega) = \frac{10^{j\omega}/C}{L(j\omega)^3 + j\omega/C - R\omega^2/10} \quad H_3(j\omega) = \frac{1/jC\omega}{jL\omega + R}$$

- 1) Mettre ces fonctions de transfert sous forme canonique en faisant apparaître les pulsations caractéristiques et facteurs d'amortissement. Donner leur valeur.
- 2) Esquisser leur diagramme de Bode asymptotique et réel.

Exercice 2 : Un filtre simple ... Le filtre RLC ...

Soit le filtre passif ci-dessous :



$$L=176 \mu\text{H} \\ C=1 \mu\text{F}$$

- 1) Sans calcul, déterminer le type de ce filtre (passe-bas, passe-haut ...).
- 2) Déterminer l'équation différentielle qui relie $V_e(t)$ et $V_s(t)$.
- 3) Rappeler ce qu'induisent la dérivée et l'intégration temporelle en notation complexe. En déduire la fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre. La mettre sous forme canonique en faisant apparaître les éléments caractéristiques.
- 4) Facultatif : Retrouver la fonction de transfert en employant cette fois-ci le formalisme des impédances complexes et les théorèmes de l'électricité.
- 5) Exprimer la fonction de transfert de ce filtre en employant la variable de Laplace. Montrer que la fonction de transfert admet deux pôles réels (éventuellement confondus) pour certaines valeurs du facteur d'amortissement m .

- 6) Calculer la valeur des pôles lorsqu'ils sont réels. Montrer que la pulsation caractéristique du filtre ω_0 est le "milieu", en échelle logarithmique, entre les pulsations de cassure ω_1 et ω_2 associées à ces pôles.

Dans la suite, nous prendrons $R=44 \Omega$.

- 7) Calculer m et les fréquences associées à ω_1 et ω_2 . Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel.

On applique à l'entrée du filtre un signal $v(t)$, carré, impair, d'amplitude crête-à-crête 2 V et de fréquence $f=4$ kHz. La décomposition en série de Fourier de ce signal est rappelée ci-dessous :

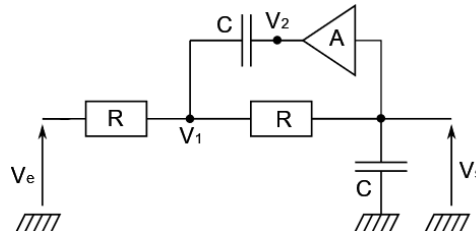
$$v(t) = \frac{4A}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[2\pi(2n+1)ft]}{2n+1} \quad \text{avec} \quad A = 1 \text{ V}$$

- 8) Tracer le spectre en amplitude de $v(t)$ ainsi que celui du signal en sortie du filtre.

La résistance R est maintenant omise (court-circuitée telle que $R=0$). Néanmoins, il reste toujours au sein du circuit une résistance série qui est celle de l'inductance, notée r , qui avait été négligée jusqu'à maintenant ! On prendra $r=1 \Omega$.

- 9) Calculer m et en déduire quel sera le comportement du filtre. Calculer son coefficient de surtension et tracer son diagramme de Bode asymptotique et réel.
- 10) Tracer le spectre du signal de sortie et le comparer à celui de la question 8.

Exercice 3 : Structure de Sallen-Key (inspiré du DS 2021)



- Pourquoi dit-on que ce filtre est actif ? Proposer un montage à base d'AOP pour réaliser l'amplificateur de gain A ($A \geq 1$).
- En régime harmonique, donner les expressions de :
 - V_2 en fonction de V_s (pensez à l'amplificateur !)
 - V_1 en fonction de V_e , V_2 et V_s (pensez au théorème de Millman !).
 - V_s en fonction de V_1 .
- En déduire que l'expression de la fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre peut s'écrire comme ci-dessous :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + (3 - A) \cdot RC \cdot j\omega + R^2 C^2 \cdot (j\omega)^2}$$

- Déterminer l'expression littérale de la pulsation caractéristique ω_0 , de la fréquence f_0 qui y correspond et du facteur d'amortissement m de ce filtre.
- Quelle est la particularité de ce filtre vis-à-vis de son facteur d'amortissement ? Justifier le fait que le gain A est limité à une valeur maximale telle que $A_{\max}=3$.

- 6) Déterminer la valeur de A pour être dans le cadre d'une réponse de Butterworth. Quelle est la particularité de cette réponse ? Quelle est l'expression du gain linéaire de cette réponse ?

Pour l'application visée, on souhaite que l'atténuation soit inférieure à 1 dB du continu à $f=1$ kHz et que l'amplitude du signal soit au moins divisée par un facteur 50 à partir de $f=10$ kHz.

- 7) Tracer le gabarit du filtre en gain en précisant toutes les valeurs caractéristiques.

Dans la suite on prendra $f_0=1,4$ kHz.

- 8) Déterminer la valeur de C pour $R=4,7$ k Ω .
- 9) En choisissant judicieusement deux points caractéristiques du gabarit, vérifier que le filtre vérifie bien le gabarit fixé.

Exercice supplémentaire pour aller plus loin !!

Exercice 4 : Signification énergétique de Q ...

Reprenons le circuit RLC de l'exercice 2 en considérant que la valeur de R est telle que le circuit est résonant ($m \ll 1$).

- 1) Pour $m \ll 1$, rappeler l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m puis des composants présents dans le circuit. Rappeler la signification de Q au niveau du diagramme de Bode du filtre.
- 2) Rappeler l'expression de la pulsation caractéristique ω_0 du circuit en fonction des composants présents. A la résonance ($\omega_r \approx \omega_0$), quelle relation relie l'impédance du condensateur et l'impédance de la bobine ? En déduire l'impédance Z_e "vue" à l'entrée du filtre.
- 3) Toujours à la résonance, si une tension sinusoïdale d'amplitude A est appliquée à l'entrée du filtre, quelle sera l'amplitude du courant ? En déduire l'énergie E_t emmagasinée dans le circuit.

Note : cette énergie est l'énergie maximale stockée au cours d'une période, sous forme électro-magnétique, dans le condensateur ou la bobine.

- 4) Dans ces conditions, quel composant dissipe de l'énergie ? Sous quelle forme ? Calculer l'énergie E_p dissipée par ce composant sur une période du signal.
- 5) Calculer le rapport E_t/E_p . Exprimer Q en fonction du rapport E_t/E_p . Conclusion(s) ?

Vous avez dû trouver la relation ci-dessous :

$$Q = 2\pi \frac{E_t}{E_d} = 2\pi \frac{\text{Energie emmagasinée}}{\text{Energie dissipée sur une période}}$$

Ce résultat montre que le phénomène de résonance est en fait imputable à une "accumulation" d'énergie au sein du circuit sous forme électro-magnétique. L'amplitude de la résonance est donc limitée par les éléments qui dissipent l'énergie au sein du circuit et qui empêche son "accumulation" au-delà d'un certain niveau !