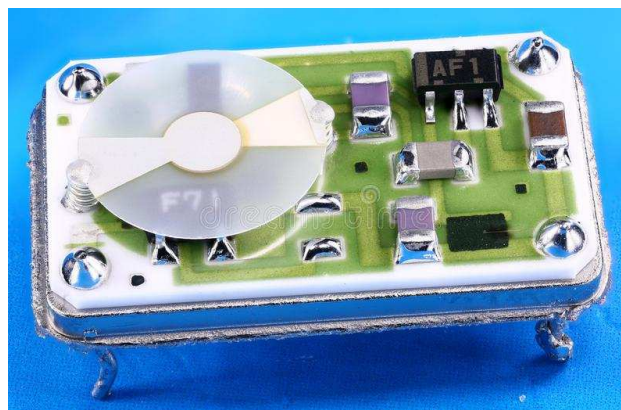


# Electronique S2

## *Filtres du second ordre*



*Oscillateur à quartz à fort Q*

**FP - 2023**

## Préambule : notation en $p$ , pôles

Dans le cadre de l'étude des systèmes linéaires, il est courant d'employer le formalisme de Laplace qui permet de généraliser la transformée de Fourier (ne rentrons pas ici dans les détails ...). Ce formalisme nous amène à introduire la variable de Laplace " $p$ " (notée " $s$ " par les anglosaxons ...) pour exprimer les fonctions de transfert via la substitution suivante :

$$p \leftrightarrow j\omega$$

Cette notation permet d'introduire les termes de "zéro" et de "pôle".

Les zéros sont les valeurs de  $p$  pour lesquelles le numérateur (le haut de la fraction ...) de la fonction de transfert s'annule.

Les pôles sont les valeurs de  $p$  pour lesquelles le dénominateur (le bas de la fraction ...) de la fonction de transfert s'annule. C'est eux qui vous nous intéresser par la suite !

# Préambule : notation en $p$ , pôles d'une fonction de transfert

A notre niveau (on est en S2 !), gardez simplement à l'esprit ceci à propos des pôles :

- La stabilité du système (le filtre étudié) impose que les pôles sont à parties réelles négatives
- Un pôle purement réel induit la présence d'une pulsation de cassure caractéristique : il donc possible de factoriser le dénominateur
- La présence d'une paire de pôles à parties imaginaires conjuguées induira un comportement (pseudo)résonant du système.

## Exemple (très simple et un peu naïf ...) du filtre passe-bas RC :

Cette fonction de transfert admet un seul et unique pôle  $p_0$  tel que :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

$$p \leftrightarrow j\omega$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

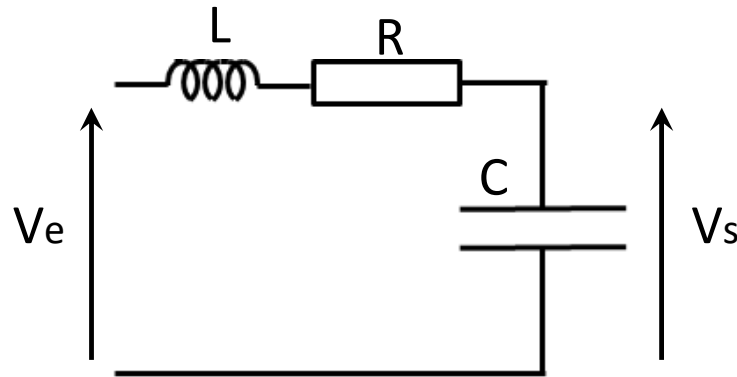
$$1 + RCp = 0 \rightarrow p_0 = -1/RC \rightarrow H(p) = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{1 - p/p_0}$$

Par identification à la forme canonique en repassant dans l'espace de Fourier (notation en  $j\omega$ ) :

$$\begin{cases} H(p) = \frac{1}{1 - p/p_0} \\ H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \end{cases} \rightarrow \omega_0 = -p_0 = 1/RC$$

## Première approche du 2<sup>nd</sup> ordre : le filtre RLC ...

Calculons la fonction de transfert d'un filtre RLC série :



$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

La fonction de transfert fait apparaître au dénominateur un terme en  $(j\omega)^2$  : le filtre est donc **d'ordre 2**.

De primes abords (restons dns le cas général), il n'est pas possible de factoriser ce polynôme. En l'état actuel des choses, vous ne savez pas tracer son diagramme de Bode ... Apprenons à le faire !

# Fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2

L'écriture générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas **d'ordre 2** dont le gain statique (pour  $\omega \rightarrow 0$ ) est fixé à **0 dB** est telle que :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2} \quad H(p) = \frac{1}{1 + 2m p/\omega_0 + (p/\omega_0)^2}$$

**A savoir  
par cœur !**

Ce filtre est caractérisé par :

- Sa **pulsation caractéristique  $\omega_0$**  (en rad/s)
- Son **facteur d'amortissement  $m$**  (sans unité, quelquefois noté  $z$ , **notation à éviter** 💣💀!).

Si on revient sur le **circuit RLC précédent**, pris comme exemple, par identification :

$$\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 = LC \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{2m}{\omega_0} = RC \quad \rightarrow \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

## Passe-bas d'ordre 2 : diagramme asymptotique

S'intéresser au **diagramme asymptotique** de ce filtre consiste à déterminer son comportement à basses et à hautes fréquences : ceci revient à faire abstraction de l'action de m de primes abords.

Son **gain linéaire**  $A_V$  (module de la fonction de transfert) est tel que (n'oubliez pas que  $j^2 = -1$  !):

$$A_V(\omega) = |H| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2 + 4m^2\left(\omega/\omega_0\right)^2}}$$

A basse fréquence :  $\omega \ll \omega_0 \rightarrow A_V \cong 1 \rightarrow G_{dB} \cong 0$  (Pente (quasi)nulle)

A haute fréquence :  $\omega \gg \omega_0 \rightarrow A_V \cong \frac{1}{(\omega/\omega_0)^2} \rightarrow G_{dB} \cong 40 \cdot \log(\omega_0) - 40 \cdot \log(\omega)$  (-40 dB/décade)

## Passe-bas d'ordre 2 : diagramme asymptotique

Le calcul de l'argument (la phase) est un peu plus compliqué ...

Pourquoi ? Car la partie réelle du dénominateur n'est pas toujours positive et la formule bien connue  $\arg(Z) = \text{atan}(\text{Im}(Z)/\text{Re}(Z))$  n'est définie que pour Re>0 soit pour un nombre complexe Z dont l'argument est compris entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$  radian soit  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$  !!

Pour  $\omega \leq \omega_0$  :

$$\Delta\varphi = \arg(H) = -\text{atan}\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\right)$$

A basses fréquences :

A la pulsation caractéristique  $\omega_0$  :

A hautes fréquences :

Pour  $\omega > \omega_0$  :

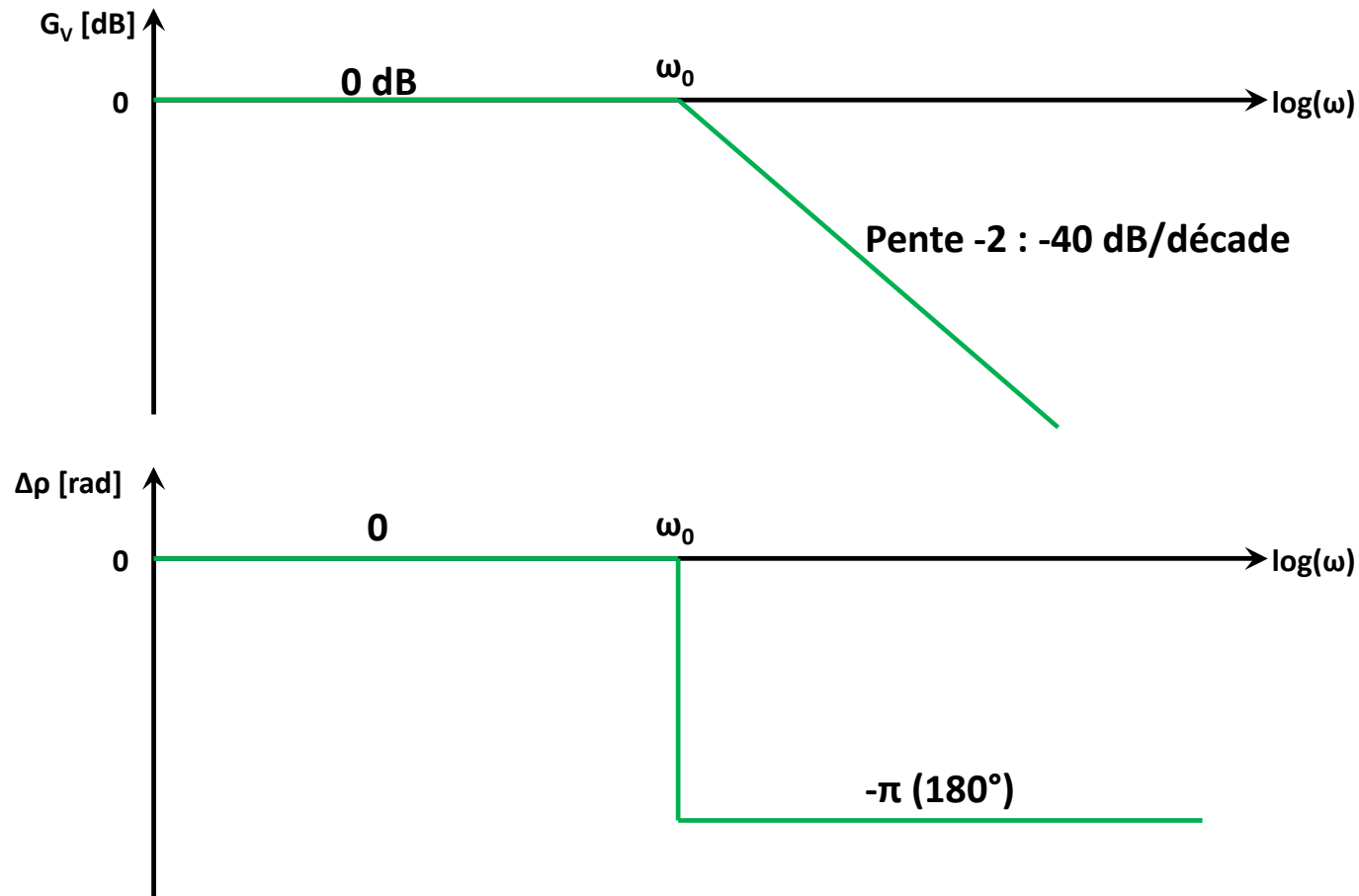
$$\Delta\varphi = \arg(H) = -\pi - \text{atan}\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\right)$$

$$\omega \ll \omega_0 \rightarrow \Delta\varphi \cong 0$$

$$\omega = \omega_0 \rightarrow \Delta\varphi \cong -\pi/2 \text{ (soit } -90^\circ)$$

$$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \Delta\varphi \cong -\pi \text{ (soit } -180^\circ)$$

# Passe-bas d'ordre 2 : diagramme asymptotique



Ici, le diagramme asymptotique "général" est indépendant de la valeur du facteur d'amortissement  $m$  !!! Mais pas le diagramme réel ...

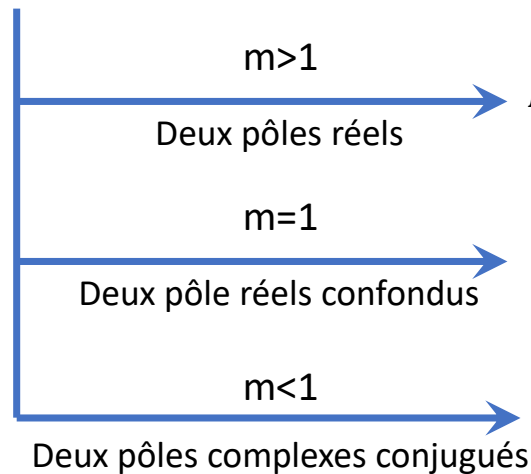


## Passe-bas d'ordre 2 : diagramme réel

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2m p/\omega_0 + (p/\omega_0)^2}$$

Trois cas  
"mathématiques"  
possibles



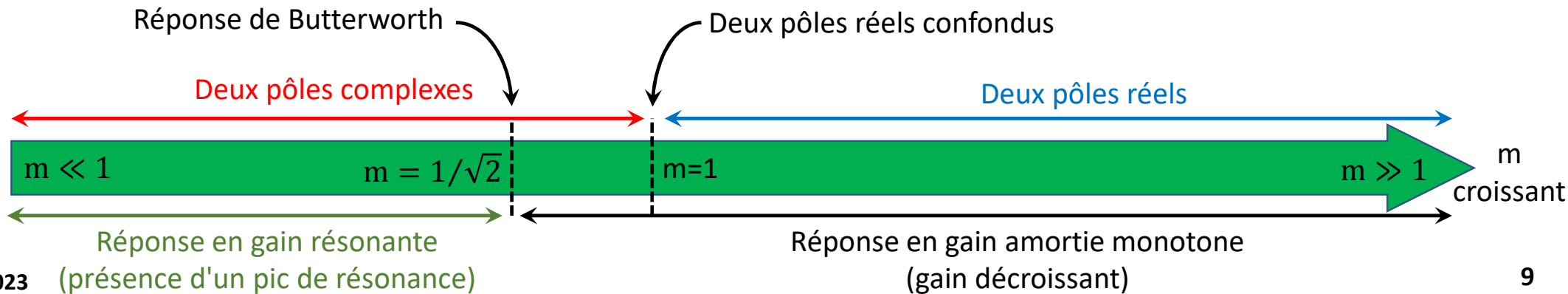
$$H(p) = \frac{1}{(1 - p/p_1)} \cdot \frac{1}{(1 - p/p_2)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_2)}$$

$$H(p) = \frac{1}{(1 - p/p_0)^2}$$

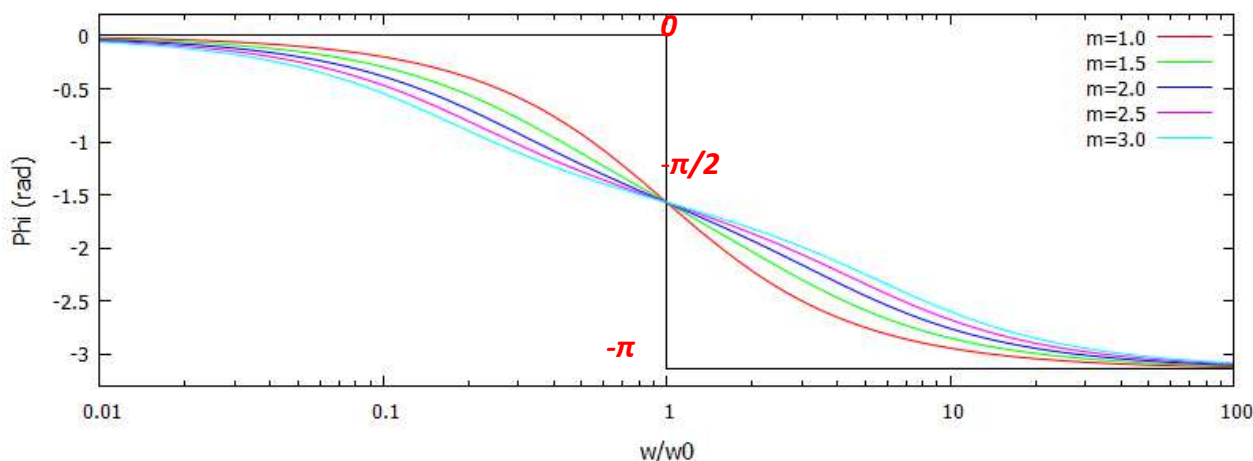
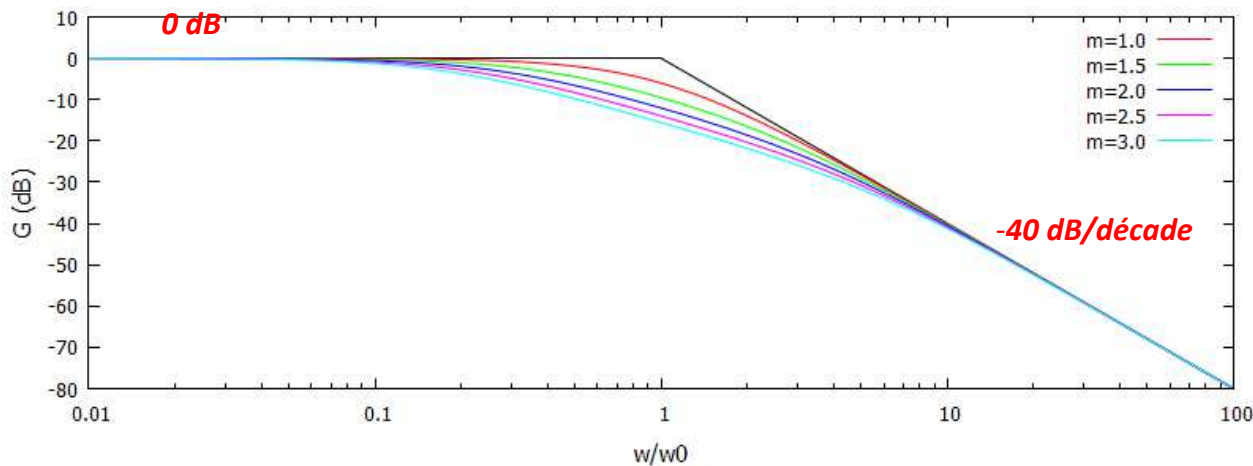
$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_0)^2}$$

Fonction de transfert **non** factorisable ...



# Passe-bas d'ordre 2 : régime amorti

1<sup>er</sup> cas :  $m > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  Régime amorti : pas de pic de résonance, réponse monotone,  $G_{dB}(\omega=\omega_0) < -3$  dB



Pour  $m \geq 1$  : deux pôles réels !

- Ici la fonction de transfert s'écrit comme le produit de deux fonctions d'ordre 1 :

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_1) \cdot (1 + j\omega/\omega_2)}$$

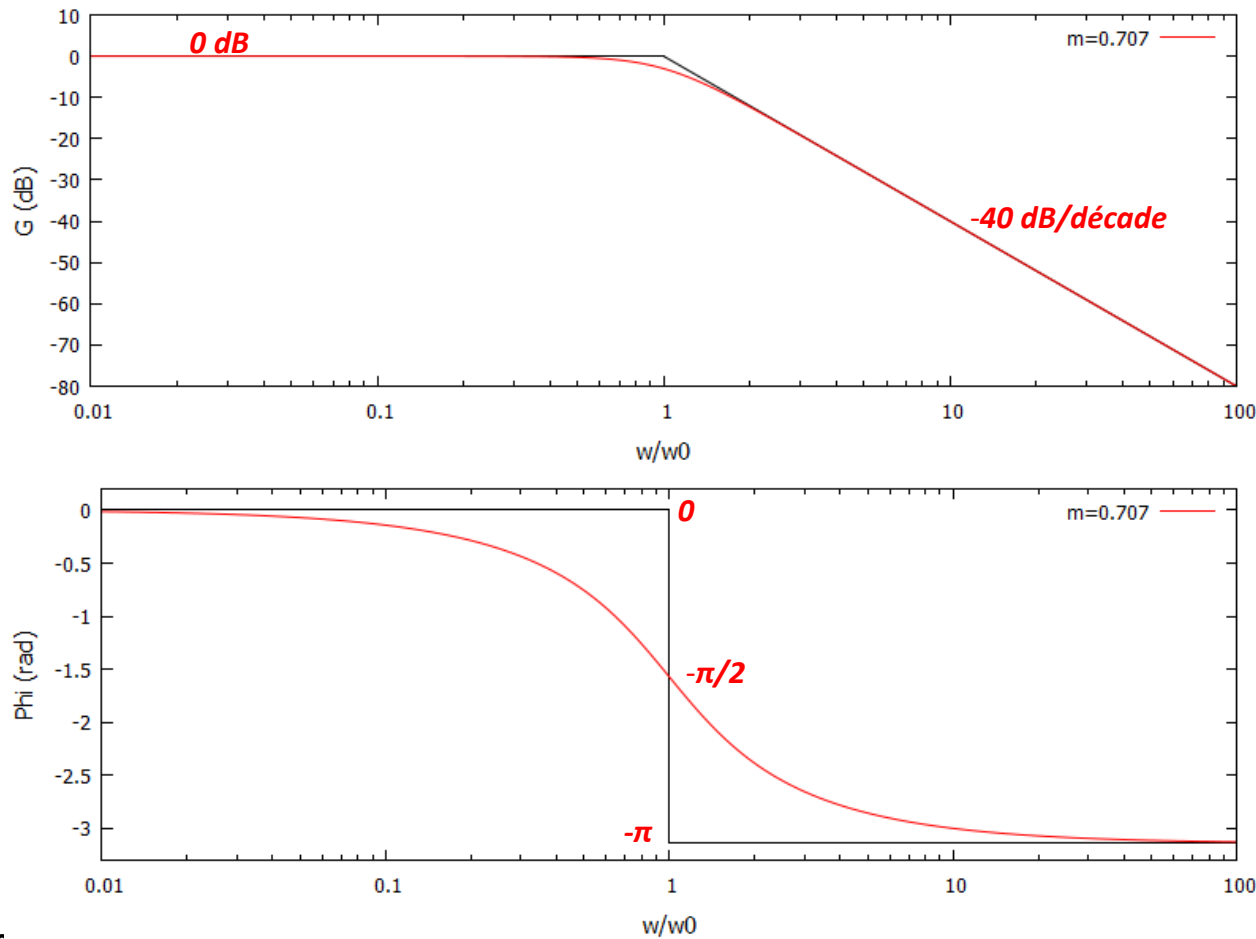
- Avec :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$$

- Ainsi, le diagramme asymptotique peut être ici favorablement adapté en faisant apparaître ces deux fréquences de cassure ...

# Passe-bas d'ordre 2 : régime amorti de Butterworth

2<sup>ème</sup> cas :  $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  Réponse de Butterworth : réponse monotone,  $G_{dB}(\omega=\omega_0)=-3$  dB



## Notes :

- Cette réponse est très utilisée car sa réponse indicielle est celle qui atteint le régime établi le plus rapidement possible !
- Le gain linéaire d'une réponse de Butterworth **d'ordre N** et de **fréquence de coupure à -3dB  $\omega_0$**  peut s'écrire comme ci-dessous :

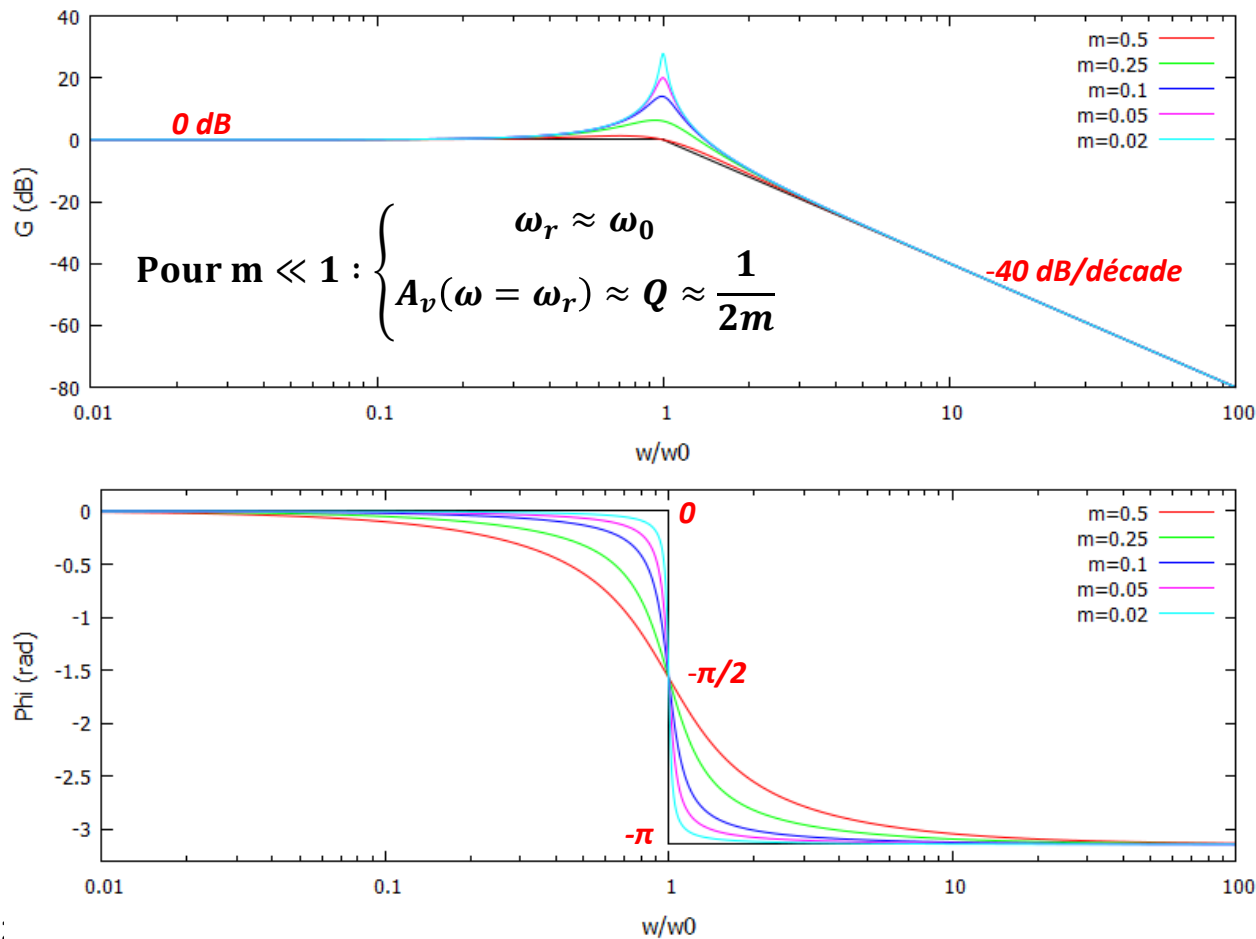
$$A_v(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^{2N}}}$$

- Ici, pour un filtre d'ordre deux ( $N=2$ ) :

$$A_v(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^4}}$$

# Passe-bas d'ordre 2 : régime résonant

3<sup>ème</sup> cas :  $m < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  Régime résonant : présence d'un pic à  $\omega = \omega_r$  tel que  $G_{dB} > 0$  dB



## Notes :

- La résonance a lieu à une pulsation  $\omega_r < \omega_0$  mais très proche et ce d'autant plus que  $m$  est petit.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} \approx \omega_0$$

- On peut définir ici "le coefficient de qualité"  $Q$  du filtre. Pour  $m$  petit,  $Q$  est égal au gain linéaire à la résonance.

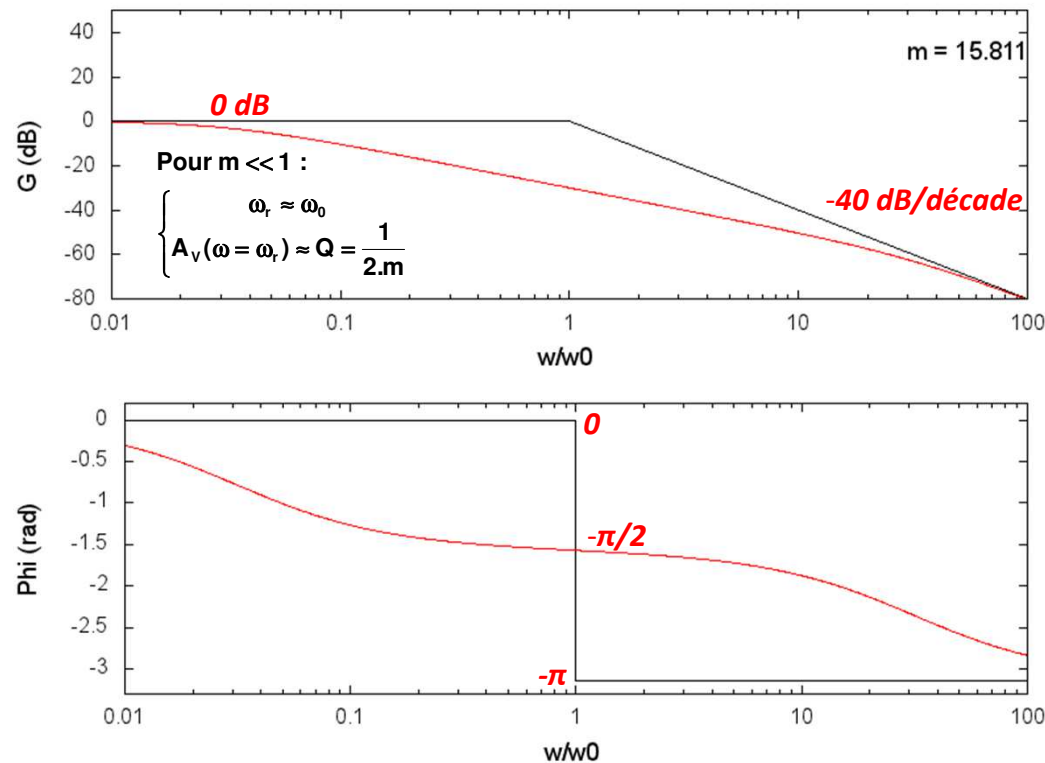
$$Q = \frac{1}{2m} \quad A_v(\omega_r) = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \approx Q$$

- $Q$  caractérise aussi la bande passante à  $-3$  dB du filtre :

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega_{-3dB}}$$

# Passe-bas d'ordre 2 : résumé en animation

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2}$$



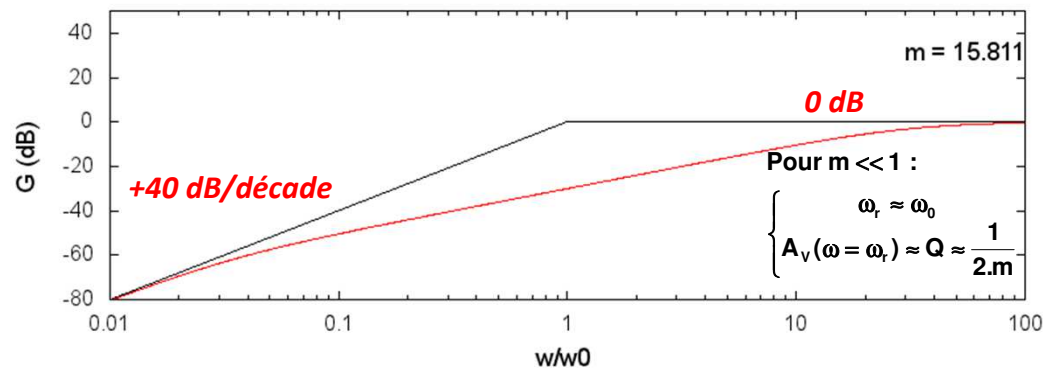
La pente du gain est de  
-40 dB/décade pour  $\omega > \omega_r$

# Passe-haut d'ordre 2

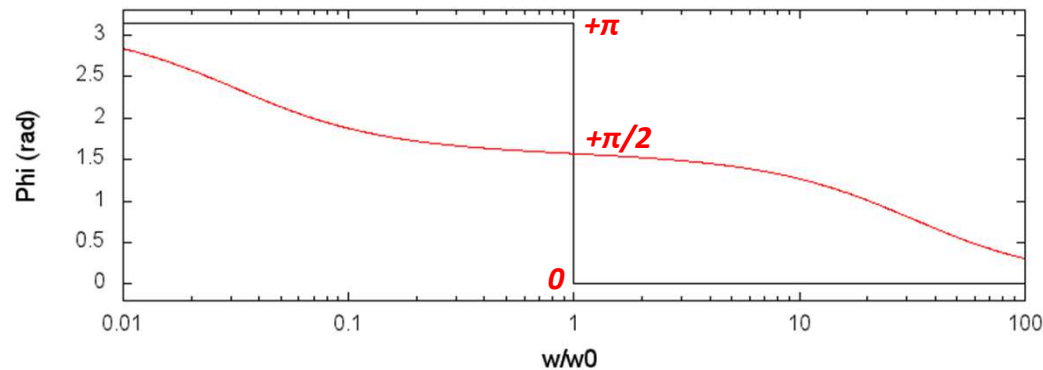
Passe-haut d'ordre 2 : ajout d'un polynôme d'ordre 2 au numérateur

$$H(j\omega) = \frac{\left( \left( j\omega/\omega_0 \right)^2 \right)}{1 + 2m j\omega/\omega_0 + \left( j\omega/\omega_0 \right)^2}$$

"Ajout" d'un polynôme d'ordre 2 au numérateur



La pente du gain est de  
 $+40 \text{ dB/décade}$  pour  $\omega < \omega_r$

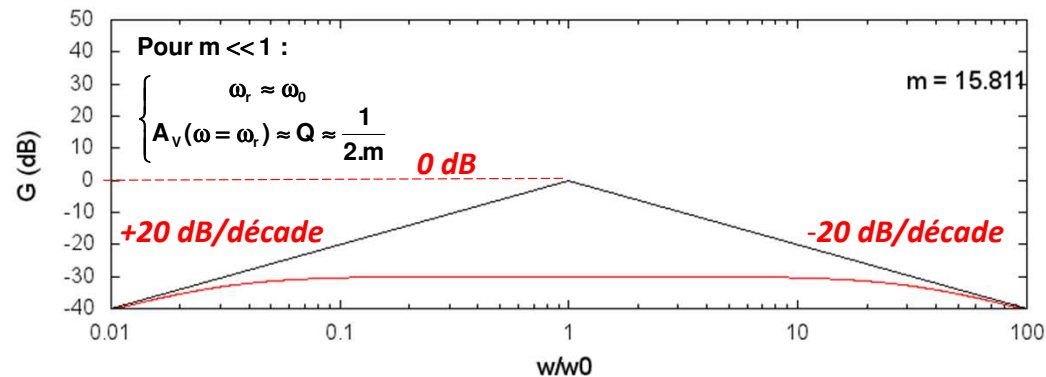


# Passe-bande d'ordre 2

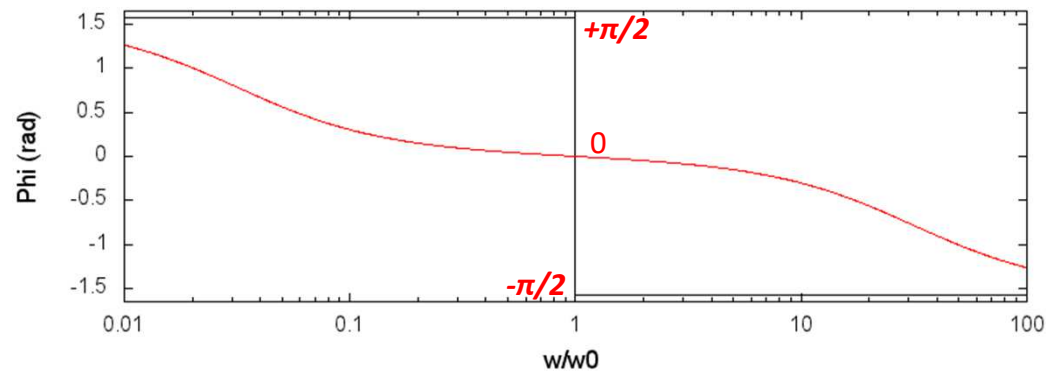
Passe-bande d'ordre 2 : ajout d'un polynôme d'ordre 1 au numérateur

$$H(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + 2m j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2}$$

"Ajout" d'un polynôme d'ordre 1 au numérateur



**Attention !!! Malgré le fait que le filtre soit toujours d'ordre 2, les pentes sont ici de  $\pm 20$  dB/décade !!**



**Notez qu'il est impossible de réaliser un passe-bande d'ordre 1 ...**