

IUT Cachan (VR)

Analyse spectrale

Application aux circuits électriques

Mars 2024

Support de cours

université
PARIS-SACLAY

IUT DE CACHAN

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

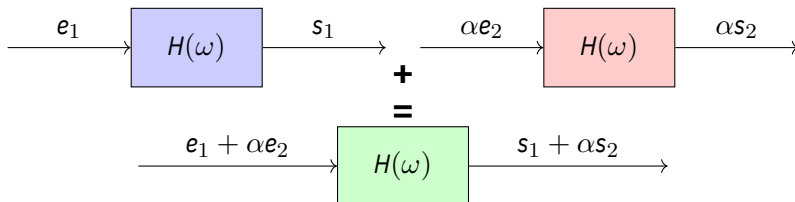
- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Linéarité

Linéarité

La connaissance de s_1 et s_2 nous permet de calculer les sorties du système pour toutes les combinaisons linéaires entre e_1 et e_2 .

$$f(e_1 + \alpha e_2) = f(e_1) + \alpha f(e_2), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

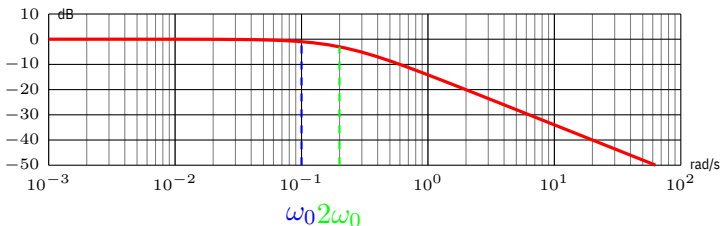
Théorème de superposition I

La sortie d'un filtre d'une composition de signaux sinusoïdaux est la somme des sorties pour chaque composante.

- Soit une composition de plusieurs signaux sinusoïdaux :

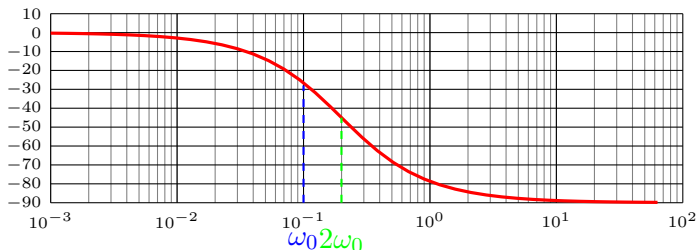
$$e(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \dots$$

- Calcul des gains linéaires $|H(j\omega)|$ pour chaque composante :



Théorème de superposition II

- Calcul des arguments $\arg(H(j\omega))$ pour chaque composante :



Composante continue

La composante continue a_0 est la composante à fréquence nulle. Ici, on prendra la fréquence la plus faible *i.e.* 10^{-3} .

Théorème de superposition III

- On utilise alors la linéarité des circuits pour calculer la sortie :

$$\begin{aligned}s(t) = & a_0 \cdot |H(0)| \\ & + a_1 \cdot |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi_1 + \arg(H(\omega_0))) \\ & + a_2 \cdot |H(2\omega_0)| \cos(2\omega_0 t + \phi_2 + \arg(H(2\omega_0))) \\ & + \dots\end{aligned}$$

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

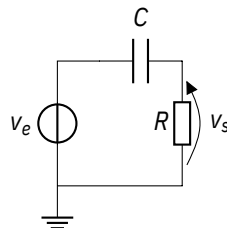
- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Les circuits d'électronique sont-ils linéaires ?

- Calculer V_{s1} pour une entrée V_{e1}
- Calculer V_{s2} pour une entrée V_{e2}
- Démontrer la linéarité du circuit pont diviseur.
- Calculer la sortie du montage pour $v_e(t) = 2 \sin(\omega t) + 4 \sin(5\omega t + \frac{\pi}{4})$, avec $RC\omega = \frac{1}{2}$



Circuit CR

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Historique

Joseph FOURIER

- Auxerre 1768 - Paris 1830
- Grand savant français
- A profondément influencé les mathématiques et la physique des sciences de son siècle
- L'étude de la propagation de la chaleur l'a amené à la découverte des séries trigonométriques portant son nom



Énoncé I

Sous certaines conditions de dérivation et de continuité, tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de pulsation ω peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux

Cette somme peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t)$$

Énoncé II

Vous pourrez rencontrer une forme « *Amplitude-phase* » mathématiquement équivalente :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

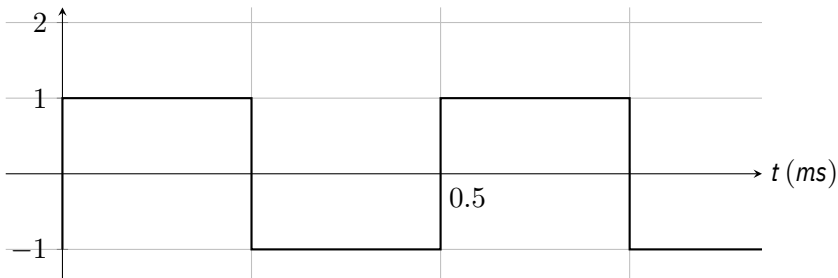
$$\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ou une forme complexe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

C'est au programme de mathématique de l'année prochaine !

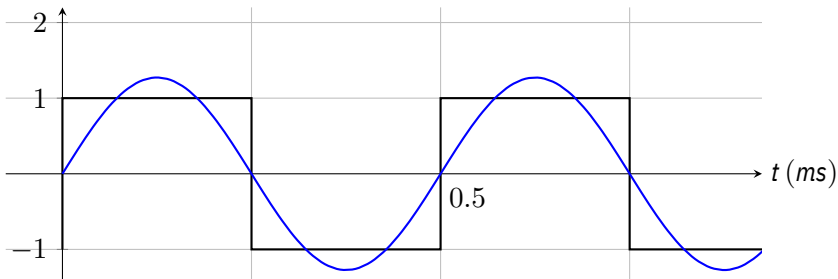
Décomposition du signal carré



Remarque

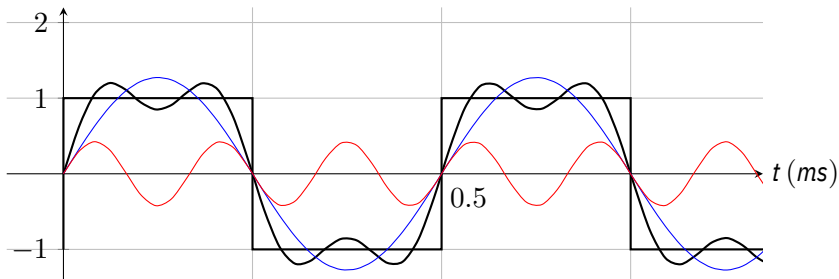
Celui-ci est impair, de moyenne nulle et d'amplitude 1V.

Décomposition du signal carré



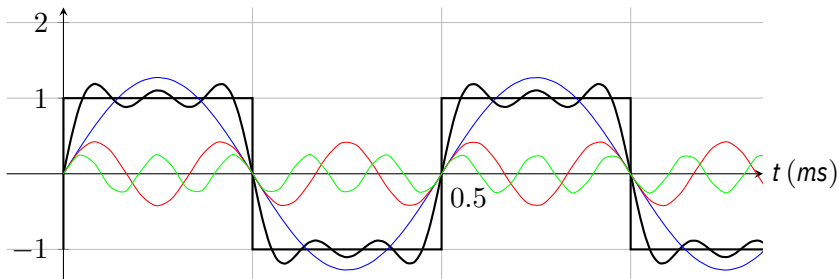
$$v(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\omega t))$$

Décomposition du signal carré



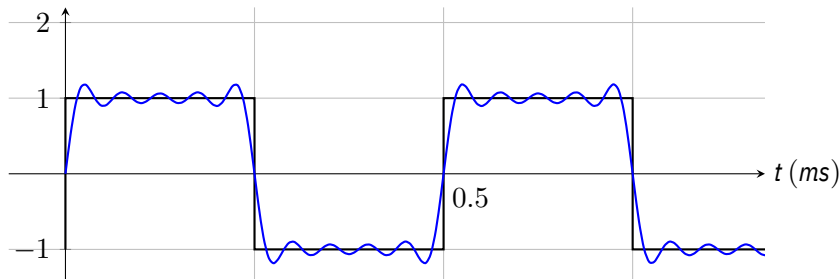
$$v(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) \right)$$

Décomposition du signal carré



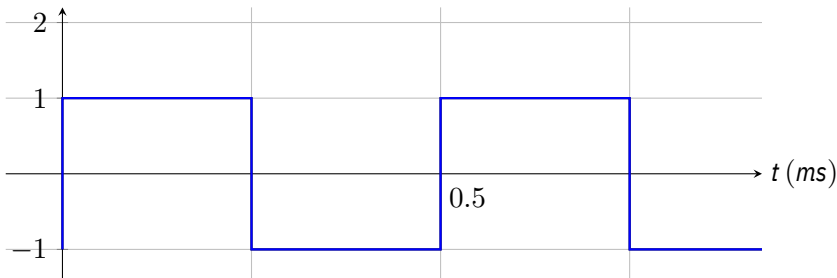
$$v(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) \right)$$

Décomposition du signal carré



$$v(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \frac{1}{9} \sin(9\omega t) \right)$$

Décomposition du signal carré



$$v(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right)$$

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Égalité de Parseval

Il est possible de calculer la puissance d'un signal avec la connaissance de l'amplitude de ses harmoniques :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Interprétation

L'énergie d'un signal se calcule en faisant la somme des énergies de chaque composante.

Égalité de Parseval

Il est possible de calculer la puissance d'un signal avec la connaissance de l'amplitude de ses harmoniques :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Interprétation

L'énergie d'un signal se calcule en faisant la somme des énergies de chaque composante.

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Calcul de la puissance I

1. Rappeler la définition de la valeur efficace s_{eff} d'un signal $s(t)$.
2. Rappeler la puissance et la valeur efficace d'un signal sinusoïdal
 $v(t) = A \cos(\omega t)$.
3. Que devrait être l'amplitude d'un signal constant, tel que sa puissance soit égale à celle du signal $v(t)$?

Calcul de la puissance II

3. Calculer la puissance et la valeur efficace d'un signal

$$v(t) = A + B \cos(\omega t)$$

(5 min)

Faites l'application numérique pour $A = 1V$ et $B = 2V$.

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

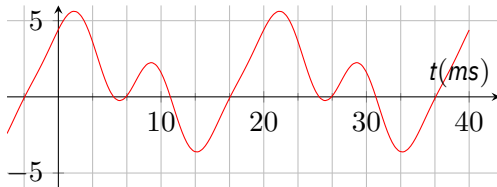
3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Introduction

Domaine temporel : analyse de l'évolution du signal dans le temps permet de mettre en évidence certaines caractéristiques :

- signal périodique ou non (détermination de la période),
- amplitude (valeur moyenne, maximale),
- signal analogique/numérique,



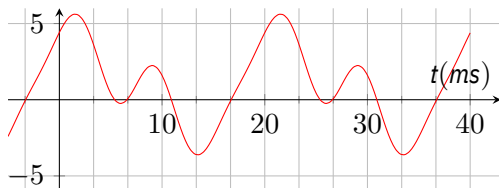
Exercice

Déterminer l'expression analytique du signal ci-dessus.

Introduction

Domaine temporel : analyse de l'évolution du signal dans le temps permet de mettre en évidence certaines caractéristiques :

- signal périodique ou non (détermination de la période),
- amplitude (valeur moyenne, maximale),
- signal analogique/numérique,



Solution : C'est pas simple !

$$1 + 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos(2\omega t) - \cos\left(3\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

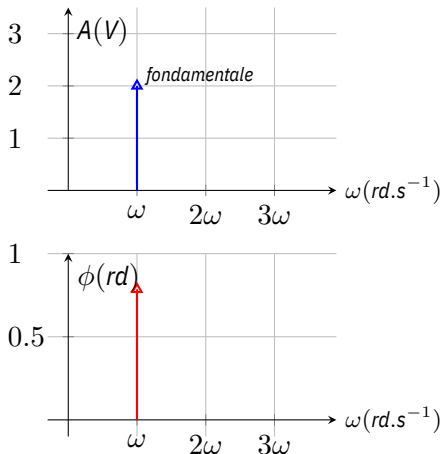
Spectre d'un signal sinusoïdal

Nouvelle représentation

Deux graphiques

- en **amplitude** : représente les amplitudes en fonction de la fréquence de chaque composante
- en **phase** : représente la phase en fonction de la fréquence de chaque composante

$$e(t) = 2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$



Spectre en amplitude et en phase

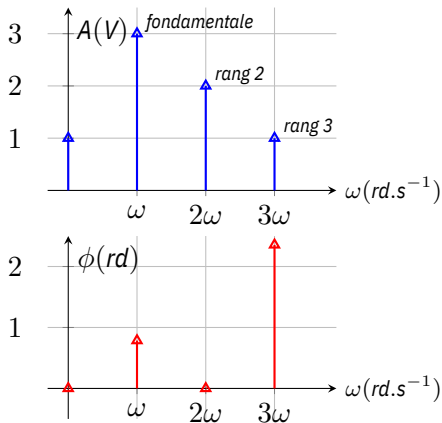
Spectre d'un signal périodique

Pour **un signal périodique**, on représente les composantes de sa décomposition en série de Fourier :

$$v(t) = 1 + 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) + 2\cos(2\omega t) - \cos(3\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Question

Justifier la phase de la quatrième composante



Spectre en amplitude et en phase

Représentation et Vocabulaire

Spectre d'un signal analogique périodique

- Les composantes sont représentées par des pics discrets (ou Dirac),
- Le spectre est symétrique pour les fréquences négatives, on ne le représentera pas,
- Les composantes, appelées **harmoniques**, sont des multiples de la fréquence du signal, appelée fréquence **fondamentale** notée f_0 .
- On appelle composante **de rang** n celle dont la fréquence vaut $n \times f_0$.
- la composante continue, ou *offset*, est la composante de fréquence nulle. C'est aussi la **valeur moyenne**.
- Les amplitudes a_n tendent vers 0 à haute fréquence.

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

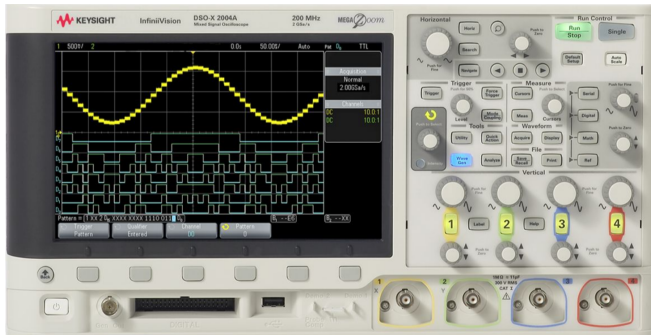
Spectre des signaux non-périodiques

Pour **un signal non-périodique**, le spectre est continu. En pratique, c'est l'oscilloscope qui permet de le mesurer. Pour cela ; il fait un calcul approché, appelé **FFT** (Fast Fourier Transform). (c.f. vidéo de la biblio).

Remarque

L'oscilloscope ne faisant pas le calcul exacte du spectre (même pour un signal périodique), il convient de bien régler la mesure. Nous verrons ça en TP.

Fast Fourier Transform



L'oscilloscope réalise rapidement la décomposition avec un algorithme appelé FFT, *Fast Fourier Transform*.

Measure > Math > FFT et sélectionner la voie.

1 - Théorème de superposition

- Propriété de linéarité
- Linéarité des circuits électroniques
- Application

2 - Décomposition en série de Fourier

- La décomposition
- Égalité de Parseval
- Application

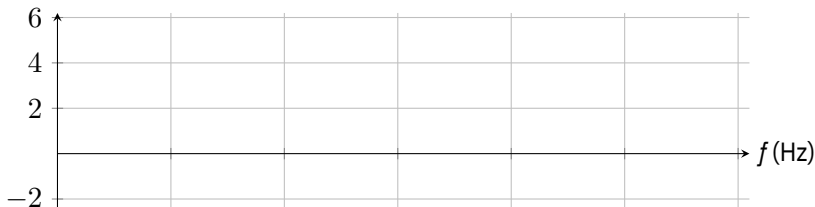
3 - Représentation spectrale

- Spectre des signaux périodiques
- Spectre des signaux non-périodiques
- Application

Tracer des spectres I

- Représenter le spectre en amplitude des signaux s_1 , s_2 , s_3 sur le même graphique. Ajouter les échelles, le nom et l'unité des axes. (15 min)

$$s_1(t) = 5\cos(314t) \quad s_2(t) = -5\cos(200\pi t - \frac{\pi}{4}) \quad s_3(t) = 1 + 5\cos(400\pi t - \frac{\pi}{4})$$

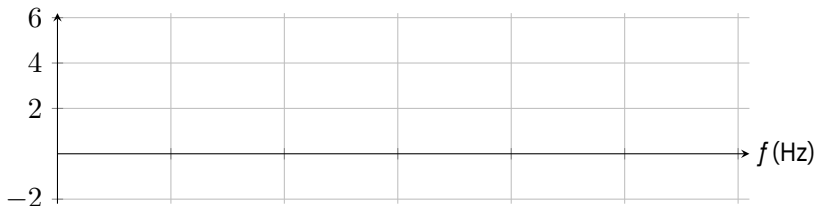


Tracer des spectres II

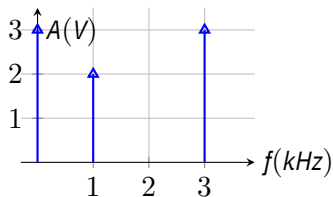
- Représenter le spectre en amplitude du signal s .

(5 min)

$$s(t) = 2 + 5 \cos(100\pi t) - 4 \sin(200\pi t)$$



Lecture de spectres I



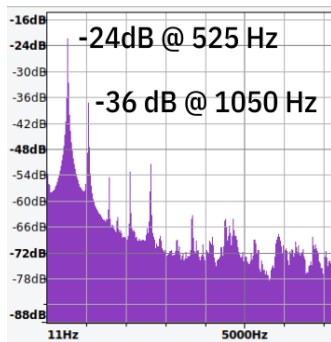
- Sans calcul, donner la valeur moyenne, _____
- Quelle est l'amplitude de l'harmonique de rang 2? _____
- Quelle est la fréquence de ce signal? _____
- Donner l'expression temporelle du signal dont le spectre en amplitude est représenté ci-dessus.
- Quelles sont les informations manquantes?

Lecture de spectres II

- En ordonnée, plusieurs échelles sont utilisées, l'échelle **linéaire**, **RMS** ou **décibel**.
- Quelle échelle est utilisée ici?

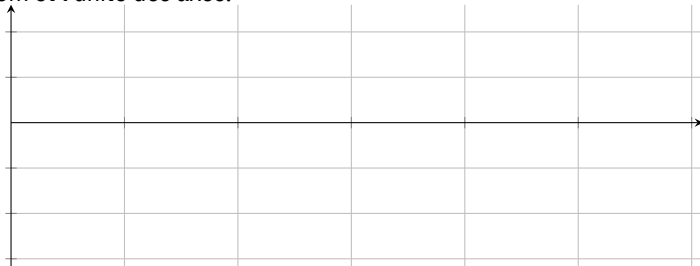
- A quelles fréquences trouve-t-on les composantes principales?
- De quelle note s'agit-il? _____
- La forme du spectre s'appelle **le timbre**.

Voici le spectre d'une note jouée à la flûte traversière.



Étude du signal carré I

- Représenter le chronogramme d'un signal carré pair de valeur moyenne nulle, de pulsation 2kHz et d'amplitude càc 2V . Ajouter les échelles, le nom et l'unité des axes.



Étude du signal carré II

- Grâce à la décomposition en série de Fourier, on obtient :

$$v(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{\cos(3\omega t)}{3} - \frac{\cos(5\omega t)}{5} + \dots \right)$$

où A est l'amplitude du signal carré.

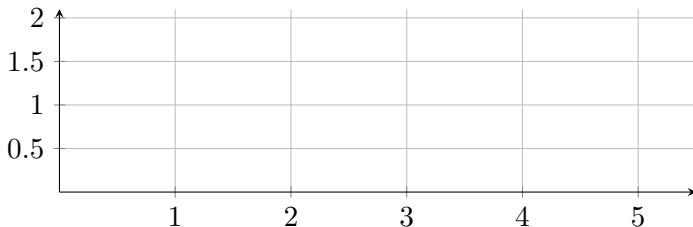
Identifier les composantes de rang 1, 2, 3, 4 et 5.

- Remplir le tableau suivant :

N° de l'harmonique	1	2	3	4	5
Fréquence (kHz)	2				
Amplitude	$\frac{4}{\pi}$				

Étude du signal carré III

- Représenter les 6 premières composantes du spectre d'amplitude



- Quelle est l'amplitude des harmoniques de rang pair? Pourquoi?

Étude du signal carré IV

- Calculer la puissance d'un signal sinusoïdal d'amplitude 2V,
- Calculer la puissance d'un signal carré d'amplitude 2V (considérer les 5 premières composantes du tableau précédent).

Filtrage du signal carré I

Reprenons le cas du signal carré pair pour une amplitude $A = 1V$ (diapo 21).
Supposons que ce signal soit filtré par un filtre passe-bas du premier ordre, de pulsation de coupure $\omega_0 = 2kHz$.

N° de l'harmonique	1	2	3	4	5
pulsation (kHz)	2				
Amplitude	$\frac{4}{\pi}$				
$ H(j\omega) $					
$arg(H(j\omega))$					

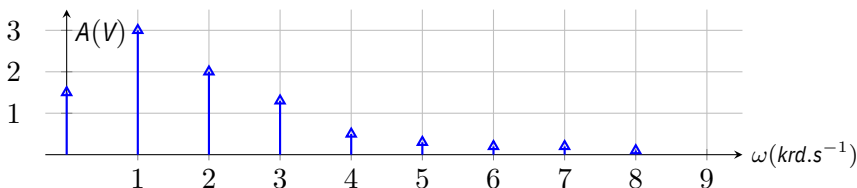
- Rappeler les expression de $|H(j\omega)|$ et de $arg(H(j\omega))$.
- Faites les applications numériques pour chaque composante.

Filtrage du signal carré II

- En utilisant le théorème de superposition, donner l'expression de la sortie $s(t)$.

Encombrement spectral I

On appelle **encombrement spectral** la bande de fréquences où l'amplitude du spectre est supérieure à une certaine valeur qui dépend du cahier des charges du système. Généralement l'amplitude correspond au niveau de bruit admis.



- Quelle est la puissance des 4 premières composantes ?
- Quelle est la puissance de ce signal ?

Quelques références vidéos I

- Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier? Une introduction visuelle : <https://youtu.be/spUNpyF58BY>
- Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles | DE4 <https://youtu.be/r6sGWTCMz2k>
- La transformée de Fourier rapide (FFT) : l'algorithme le plus ingénieux de tous les temps ? <https://youtu.be/h7ap07q16V0>
- Researchers thought this was a bug (Borwein integrals)
<https://youtu.be/851U557j6HE>