

Electronique S2

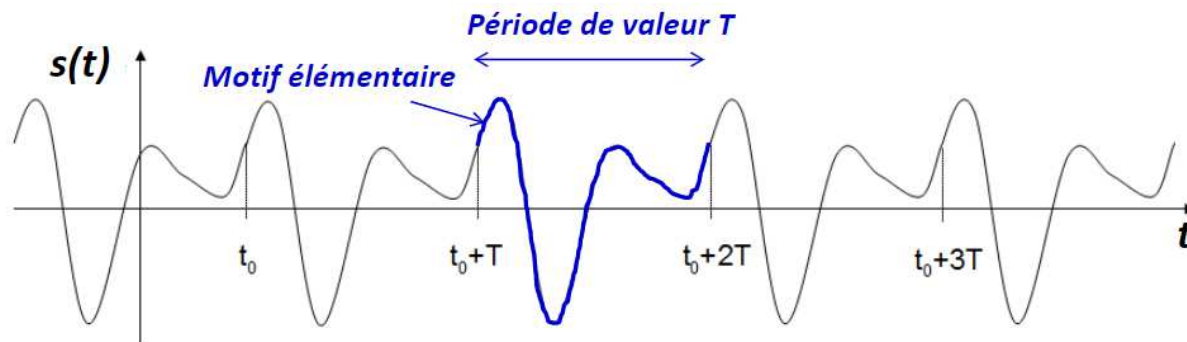
Rappels sur le régime sinusoïdal forcé



FP - 2022

Pourquoi s'intéresser aux signaux sinusoïdaux ?

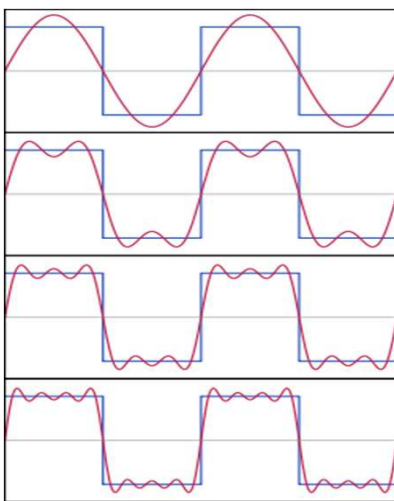
La grande majorité des signaux sont, du moins sur un laps de temps donné, **périodiques** : le même motif se répète dans le temps avec une **période T** :



$$s(t) = s(t + k.T)$$

$$s^{(n)}(t) = s^{(n)}(t + k.T)$$

Avec k entier



Tout signal périodique "réel" (lire intégrable) peut se décomposer en une somme de cosinus et de sinus : c'est la **transformée de Fourier discrète** ...

Ainsi, si nous savons manipuler un "simple" signal sinusoïdal, nous savons traiter tous les signaux périodiques (et pas que !) que nous pouvons rencontrer en GE en appliquant le principe de superposition !

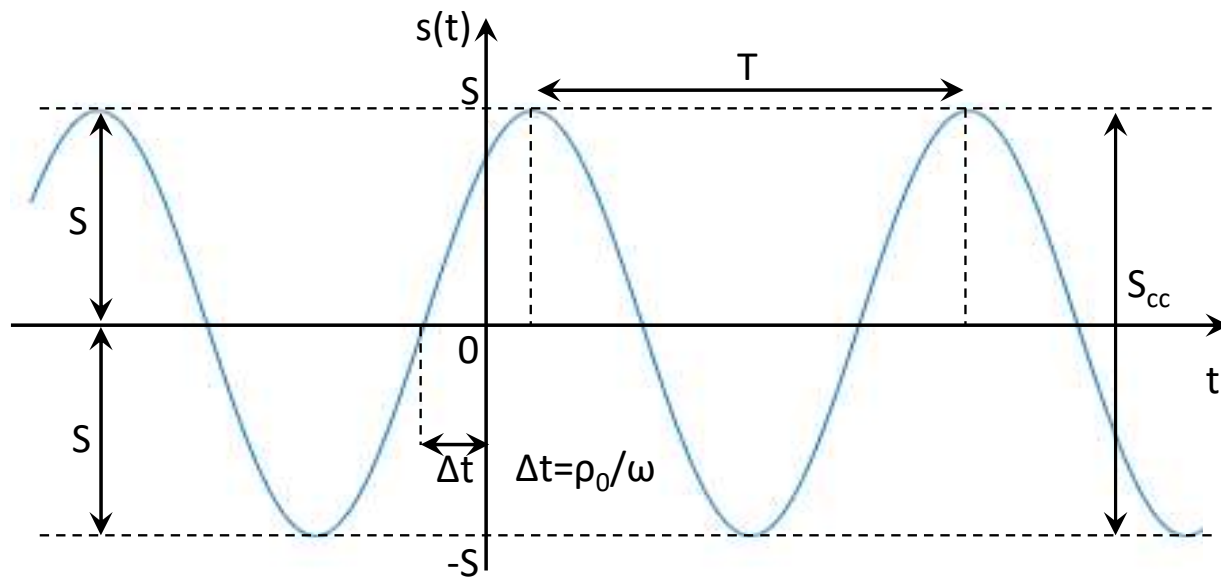


Joseph Fourier

Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

On utilisera généralement la fonction sinus comme référence ... Notez que cosinus et sinus sont équivalents à une phase $\pm\pi/2$ prêt !

$$s(t) = S \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0)$$



S [dim. du signal] : Amplitude

S_{cc} [dim. du signal] : Amplitude pic à pic
(crête à crête) $S_{cc} = 2 \cdot S$

T [s] : Période

f [Hz= s^{-1}] : Fréquence $f = 1/T$

ω [rad/s] : Pulsation $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi/T$

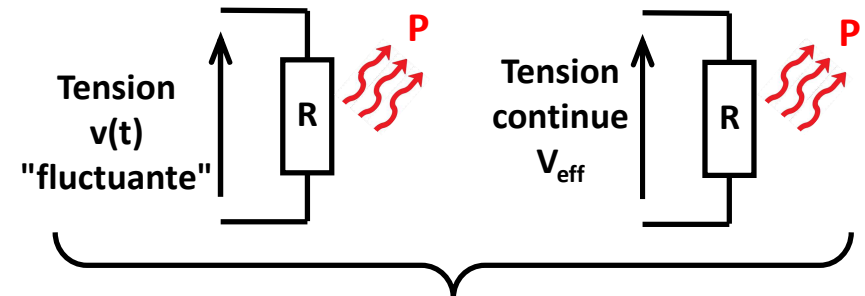
ρ_0 [rad] : Phase à l'origine

Note : dans la suite, on considèrera que des circuits **linéaires**. Ceci implique que la pulsation (et donc la fréquence) de tous les signaux (tensions ou courants) sera la même partout !

Valeur efficace d'un signal

L'efficacité énergétique d'un signal $s(t)$ (sinusoïdal ou non) est caractérisée par sa **valeur efficace S_{eff}** appelée encore S_{RMS} (*Root Mean Square*).

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T s^2(t) \cdot dt}$$



La même puissance P est dissipée dans R !

Dans le cas d'un signal sinusoïdale (et seulement dans ce cas !!) :

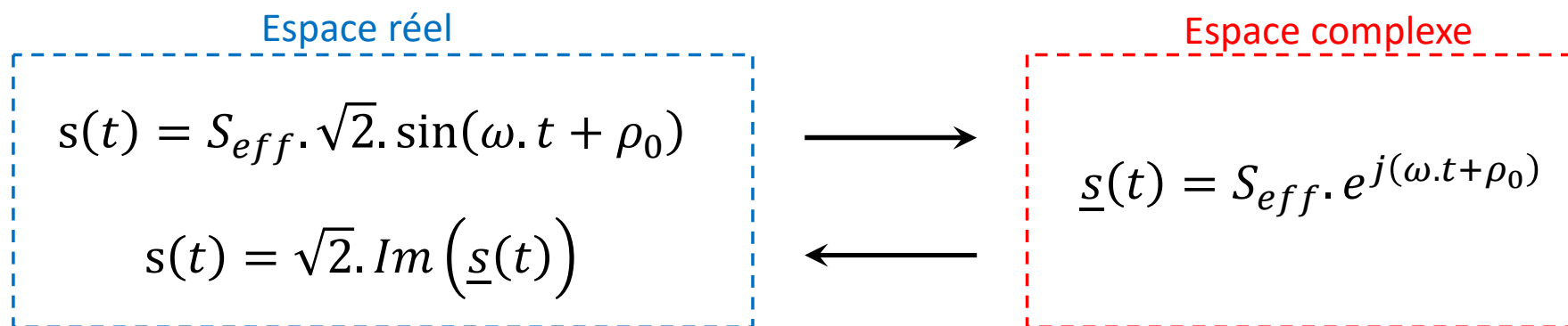
$$S_{eff} = \frac{S}{\sqrt{2}} \longrightarrow s(t) = S \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0) = S_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0)$$

Attention !! Sauf dans des cas bien particuliers, on **N'ADDITIONNE JAMAIS** des valeurs efficaces entre elles !!! Par exemple, l'additivité des tensions dans un circuit série ne s'applique pas dans le cas des valeurs efficaces ... Si vous le faites 💣!☠️😞 !!



Notation complexe temporelle

A l'instant t , le signal $s(t)$ est défini par deux quantités : sont **amplitude** (ou sa valeur efficace) et sa **phase instantanée** $\rho(t)=\omega t+\rho_0 \dots$ Il existe un outil mathématique permettant de manipuler ces quantités conjointement : la notation complexe !!



A partir de la forme complexe, il est possible de retrouver **les caractéristiques** de $s(t)$:

$$|\underline{s}(t)| = S_{eff} \quad \arg(\underline{s}(t)) = \varphi(t)$$

Même si on utilise la forme exponentielle plus "pratique", n'oubliez pas la forme algébrique !

$$\underline{s}(t) = S_{eff} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \rho_0)} = S_{eff} \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho_0) + j \cdot S_{eff} \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0)$$

Notation complexe réduite

En régime établi, l'amplitude des signaux est constante tout comme leur déphasage les uns par rapport aux autres : les calculs peuvent être réalisés pour n'importe quel instant t (on prends une "photo"). Autant en choisir une qui simplifie les notations : **prenons $t=0$!**

Notation complexe temporelle

$$\underline{s}(t) = S_{eff} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \rho_0)}$$



Notation complexe réduite

$$\underline{s} = S_{eff} \cdot e^{j\rho_0}$$

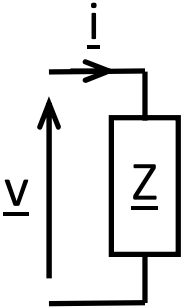
Dans le cadre de la notation réduite, **le module est toujours la valeur efficace** du signal mais **son argument devient sa phase à l'origine** (soit sa phase instantanée ρ à $t=0$) :

$$|\underline{s}| = S_{eff}$$

$$\arg(\underline{s}) = \varphi(t = 0) = \varphi_0$$

Impédance complexe

L'impédance \underline{Z} (qui s'exprime comme la résistance en Ohms) découle de la généralisation de la loi d'Ohm en régime sinusoïdal en employant la notation complexe :


$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$
$$|\underline{Z}| = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{i}|} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}}$$
$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{i}) = \varphi_{0v} - \varphi_{0i} = \varphi_{v/I}$$

Pour résumer et à savoir **absolument** :

Le module de l'impédance est égale au rapport de la tension efficace sur le courant efficace au niveau du composant

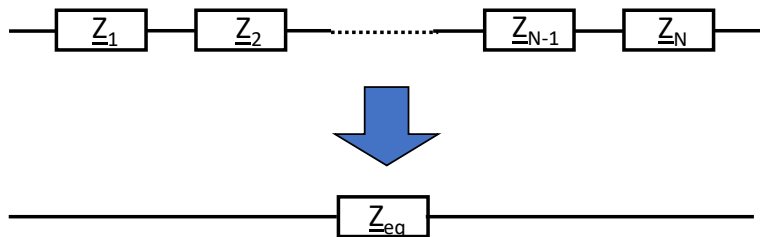
L'argument de l'impédance est égale au déphasage entre la tension et le courant au niveau du composant

Impédance complexe, assemblage de composants

Le calcul d'impédances équivalentes obéit aux mêmes règles que celles employées pour le calcul de résistances équivalentes.

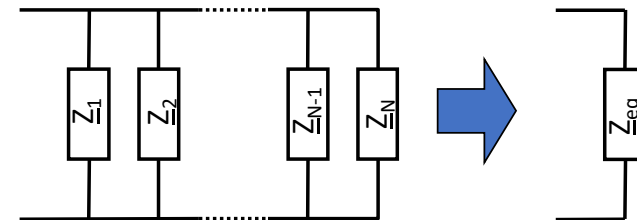
Attention !!! Les calculs se font **TOUJOURS** en gardant l'expression complexe des impédances et non pas leur module !

Association de N impédances en série :



$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \dots + \underline{Z_{N-1}} + \underline{Z_N}$$

Association de N impédances en parallèle :



$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \dots + \frac{1}{\underline{Z_{N-1}}} + \frac{1}{\underline{Z_N}}$$

Pour deux (et seulement deux) impédances en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} \longrightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_1} \cdot \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

Impédance des composants de base

Les relations temporelles tension-courant au sein des composants sont bien entendu toujours valable avec la notation complexe temporelle !

Exemple du condensateur : $\underline{i}(t) = C \cdot \frac{d\underline{v}(t)}{dt}$ où on pose : $\underline{v}(t) = V_{eff} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \rho_0)}$

$$\underline{i}(t) = C \cdot \frac{d(V_{eff} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \rho_0)})}{dt}$$

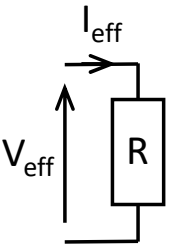
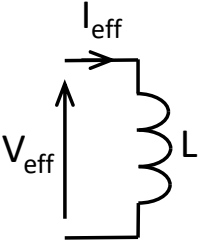
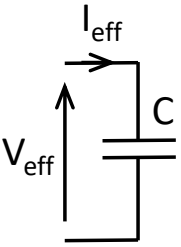
$$\underline{i}(t) = j\omega \cdot C \cdot V_{eff} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \rho_0)}$$

$$\underline{i}(t) = j\omega \cdot C \cdot \underline{v}(t)$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{1}{jC\omega}$$

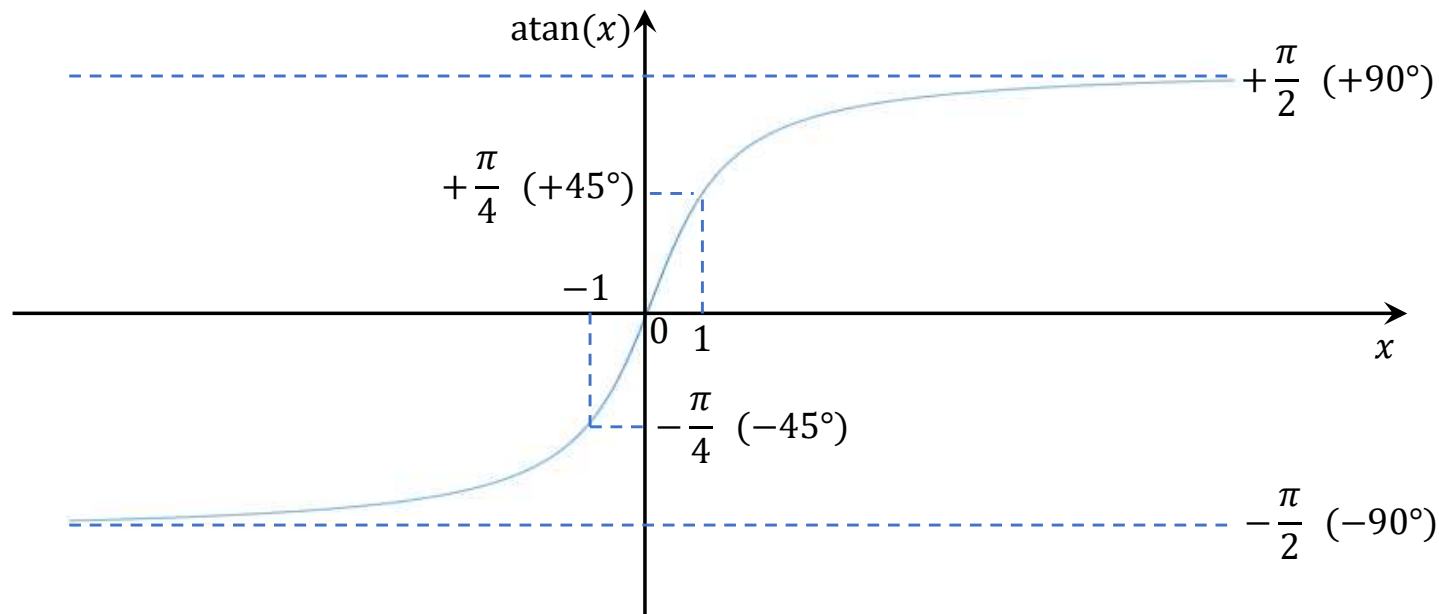
Le raisonnement est le même dans le cas de la résistance (plus facile !) et l'inductance ...

Impédance des composants de base : synthèse

Composant	Impédance \underline{Z}	Module $V_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$	Argument $\rho_{v/i}$
Résistance 	$\underline{Z}_R = R$ Impédance purement réelle et positive	$ \underline{Z}_R = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = R$	$\arg(\underline{Z}_R) = \varphi_{v/I} = 0$ Tension et courant en phase
Inductance 	$\underline{Z}_L = jL\omega$ Impédance imaginaire pure et positive	$ \underline{Z}_L = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = L\omega$	$\arg(\underline{Z}_L) = \varphi_{v/I} = +\frac{\pi}{2} (+90^\circ)$ Tension en avance de 90° par rapport au courant
Condensateur 	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ Impédance imaginaire pure et négative	$ \underline{Z}_C = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{1}{C\omega}$	$\arg(\underline{Z}_C) = \varphi_{v/I} = -\frac{\pi}{2} (-90^\circ)$ Tension en retard de -90° par rapport au courant

Petit aparté, rappel sur la fonction atan(x)

Dans de très nombreux cas, le calcul des déphasage amène à des résultats où apparaît la fonction réciproque (inverse) de tangente : atan(x) (notée également $\tan^{-1}(x)$)



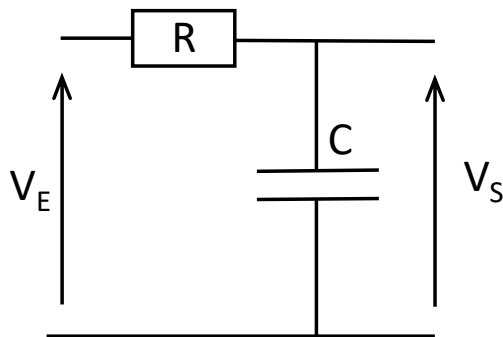
Notez que cette fonction **est impaire** : $\text{atan}(-x) = -\text{atan}(x)$

Il existe des valeurs **à connaître** : $\text{atan}(0) = 0$; $\text{atan}(1) = \pi/4$; Pour $x \rightarrow +\infty$ $\text{atan}(x) = \pi/2$

Théorèmes de base en régime sinusoïdal : cellule RC

Tous les théorèmes vus en régime continu (ponts diviseurs, Thévenin, Millman ...), sont valables en régime sinusoïdal **en utilisant la notation complexe** ! Attention, on ne le répète jamais trop, **ne pas employer les valeurs efficaces** dans les calculs ce qui aboutirait à des résultats totalement faux !

Exemple, calculons V_S en fonction de V_E grâce à la loi des ponts diviseur de tension :



$$\underline{V_S} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \cdot \underline{V_E} \qquad \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{V_{S\text{eff}}}{V_{E\text{eff}}} = \left| \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi_{V_S/V_E} = \arg \left(\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} \right) = -\text{atan}(RC\omega)$$

Cellule RC, pulsation caractéristique

$$\frac{V_{Seff}}{V_{Eeff}} = \left| \frac{V_S}{V_E} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

(RCω)² sommé avec 1 qui n'a pas d'unité : (RCω)² et donc RCω n'a pas d'unité !

$$\varphi_{V_S/V_E} = \arg \left(\frac{V_S}{V_E} \right) = -atan(RC\omega)$$

*RCω argument d'un fonction trigo.
réciproque : RCω sans unité !*

Par analyse dimensionnelle, la quantité RCω n'a pas de dimension ! On peut donc écrire cette quantité comme **un rapport de pulsations** en introduisant une **pulsation caractéristique ω₀** :

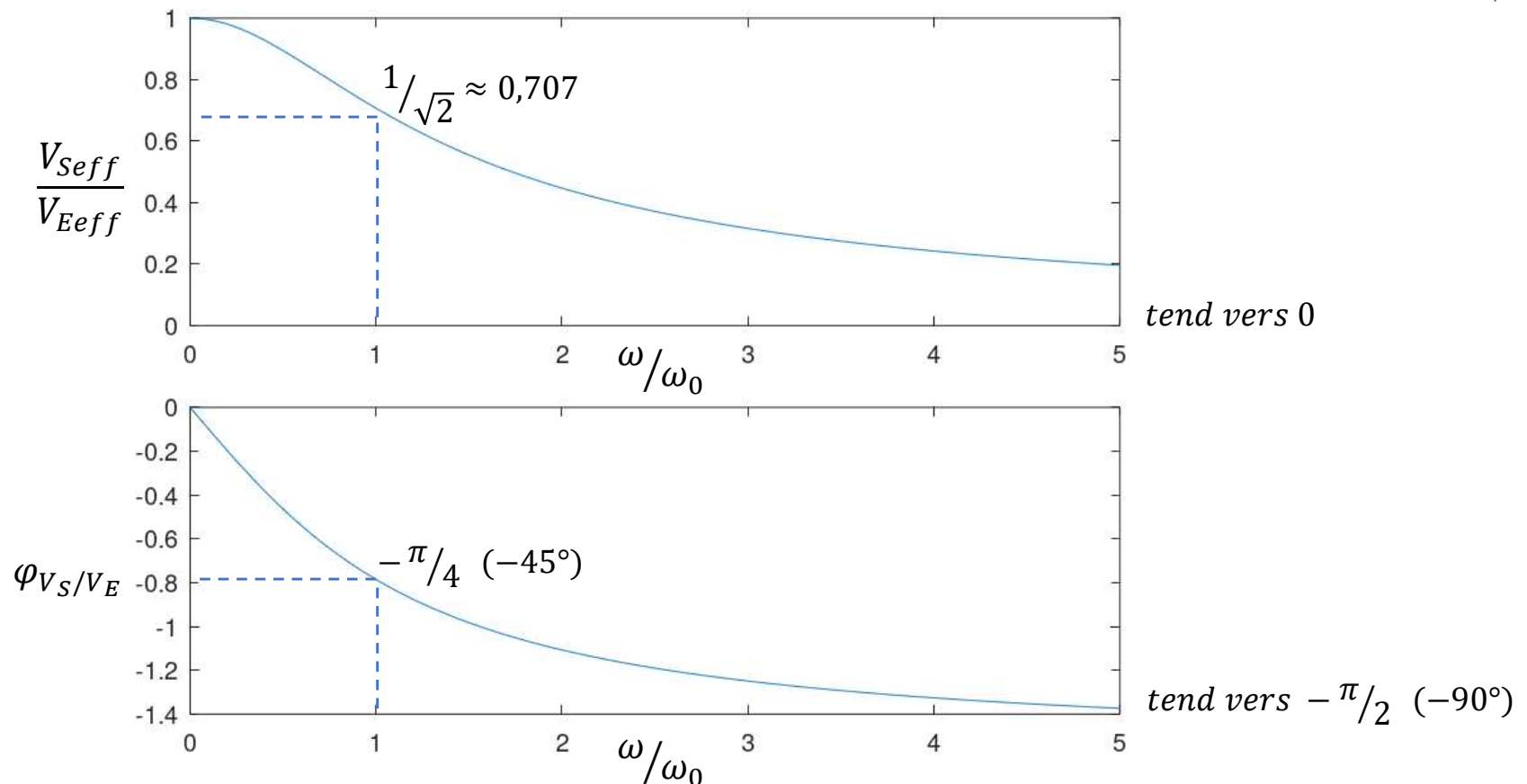
$$\frac{V_{Seff}}{V_{Eeff}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\varphi_{V_S/V_E} = -atan(RC\omega) = -atan(\omega/\omega_0)$$

$$\text{Avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Cellule RC, tracés linéaires

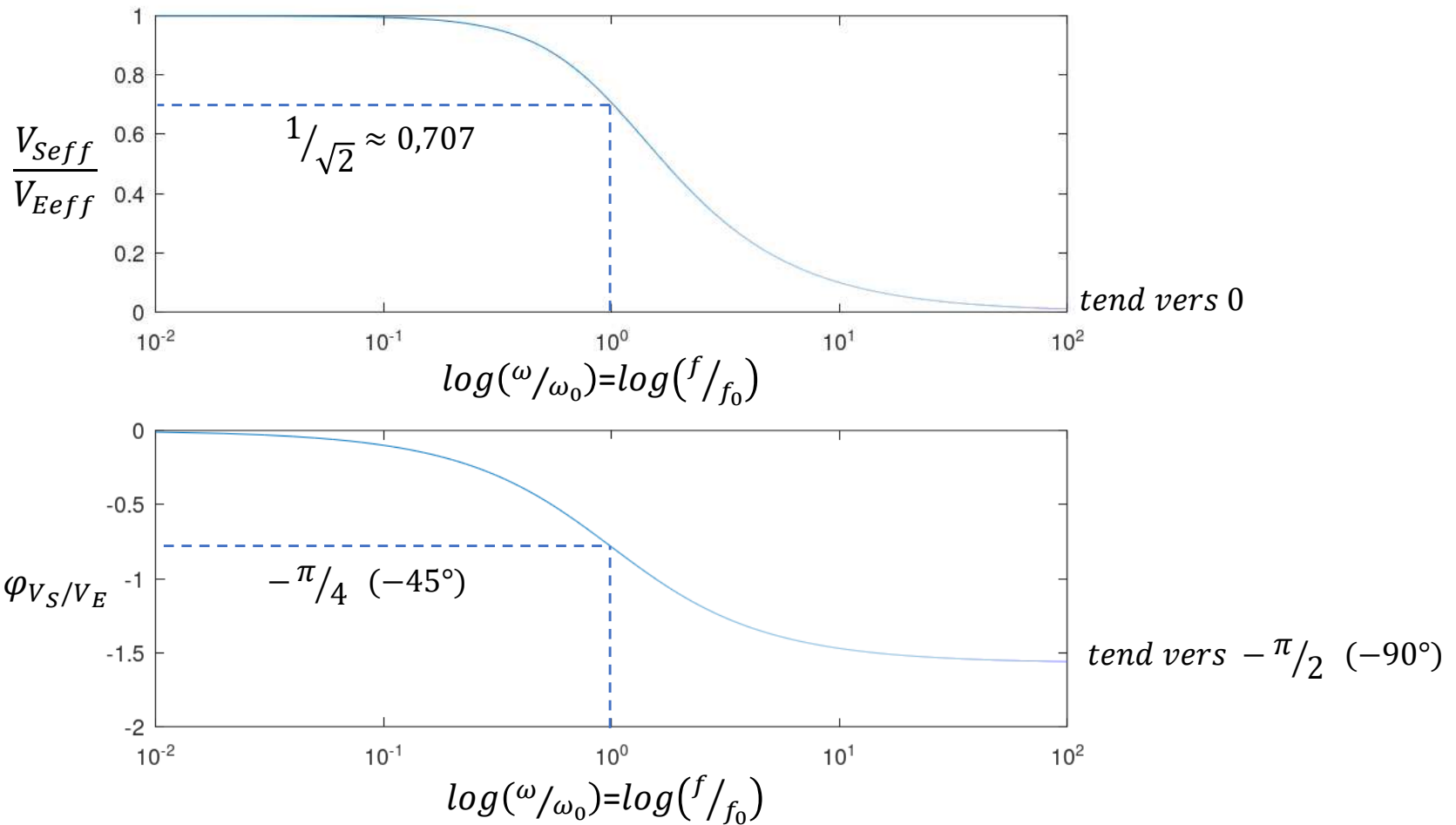
V_{seff}/V_{Eeff} et $\rho_{VS/VE}$ peuvent être tracés en fonction du rapport ω/ω_0 !



Note : ces tracés seraient les mêmes en fonction de f/f_0 avec $f_0 = 1/(2\pi RC)$ (fréquence caractéristique)

Cellule RC, échelle logarithmiques

Comment avoir le tracé pour les (très) basses et les (très) hautes fréquences ?
Utilisons une échelle **logarithmique** (en base 10) pour l'axe des abscisses !



Echelle logarithmique, quelques remarques ...

- Permet **sur un même axe** de placés des valeurs **dans une très grande gamme**
- Il est **impossible de placer le zéro** sur un axe logarithmique : on peut s'en approcher mais sans **jamaïs** l'atteindre !
- Des points sont **équidistants** "graphiquement parlant" si il progressent suivant une **suite géométrique** ($x_{n+1}=A.x_n$ avec A constante)
- Deux points x_1 et x_2 ($x_2 > x_1$) sont séparés d'une **décade si $x_2=10.x_1$** , d'une **octave si $x_2=2.x_1$**
- Vous disposerez souvent d'axes "3 ou 4 décades". Bien choisir les minimums et maximums de l'axe (toujours des puissances de 10 !) pour que la zone intéressante soit visible !

